Rationale und irrationale Harmonie

Anton Krammer

1. Die Pythagoreer und die Harmonie der Oktave

Die grundlegende Idee der Harmonie stammt von Pythagoras (um 570-480 v. Chr.). Der ursprüngliche etymologische Sinn des griechischen Wortes für Harmonie, "Harmonia", war Zusammenfügung, Vereinigung, Übereinstimmung, Einklang. In der Musik bedeutet es den wohlklingenden Zusammenklang einzelner Töne, und die Harmonielehre der Pythagoreer befaßte sich vor allem mit symphonen Zusammenklängen. In der ältesten Theorie der griechischen Musik verstand man ursprünglich unter "Harmonia" die Tonleiter im Umfang einer Oktave, deren acht Töne mit den Namen einer achtsaitigen Lyra benannt wurden und sich auf zwei Tetrachorde verteilten. Die Tonfolge hatte eine absteigende Richtung, d.h. die Töne wurden der Höhe nach von oben nach unten aufgezählt, zumeist von *a* über *g*, *f* zu *e*. Indem ein zweiter Tetrachord von oben her (*e', d', c', h*) hinzugefügt wurde, gewann man die Oktave. Die Harmonie ist daher die Zusammenfügung und ihr Ergebnis die Tonleiter, die Oktave, die ihrerseits zwei weitere symphone Intervalle, die Quinte und die Quarte enthält, aus denen sie aufgebaut werden kann: Quinte (2:3) plus Quarte (3:4) ergibt Oktave (1:2) (Zusammensetzung zweier musikalischer Intervalle entspricht mathematisch der Multiplikation der beiden Verhältniszahlen; siehe weiter unten). *Die pythagoreische Harmonie in der Musik ist "Einheit in der Mannigfaltigkeit", die Zusammenfügung der einzelnen Töne im Wege der Verbindung zweier Tetrachorde zur Einheit der Oktave, die sich aus den symphonen Intervallen Quinte und Quarte aufbaut.*[1]

Zu dieser großartigen Entdeckung, den Tönen Zahlen und den Zusammenklängen Zahlenverhältnisse zuzuordnen, gelangte Pythagoras durch "Experimente" auf dem von ihm erfundenen Instrument mit nur einer Saite, dem Monochord. Gaudentius berichtet: *(Pythagoras) spannte eine Saite über einen Maßstab (Kanon) und teilte ihn in zwölf (gleiche) Teile. Dann ließ er zunächst die ganze Saite ertönen, dann die Hälfte, d.h. sechs Teile, und er fand, daß die ganze Saite zu ihrer Hälfte symphon sei, und zwar nach dem Zusammenklang der Oktave. Nachdem er darauf erst die ganze Saite, dann 3/4 von ihr hatte erklingen lassen, erkannte er die Konsonanz der Quarte und analog für die Quinte.*[2]

Der Grund für die Maßstabseinteilung in zwölf Teile rührt daher, weil man von der Zahl 12 in ganzen Zahlen die Hälfte, also die Oktave (6:12), zwei Drittel, also die Quinte (6:9) und drei Viertel, also die Quarte (6:8), bilden kann. Die Zahlen 6, 8, 9, 12 spielen daher bei den Pythagoreern eine große Rolle, zumal damit auch die für die pythagoreische Musiktheorie wichtigen Mittel, das arithmetische und das harmonische, enthalten sind, was in der Proportion: 6:8 = 9:12 zum Ausdruck kommt. Die Zahl 9 ist das arithmetische Mittel A zwischen 12 und 6, und die Zahl 8 das harmonische Mittel H zwischen 12 und 6. Diese vier Zahlen stellen zugleich eine weitere Version der berühmten pythagoreischen Tetraktys dar, deren bekannteste (1+2+3+4 = 10) ist. Der römische Schriftsteller Boethius gab dieser Tetraktys den Namen: "Harmonia perfecta maxima", da sie neben den reinsten Konsonanzen, wie Oktave, Quinte und Quarte, auch den für die Skalenbildung wichtigen Ganzton 8:9, den griechischen Tonos, enthält und damit die vier Grundelemente der Harmonie in der antiken Musik. Da für die Pythagoreer die Welt

---

1. Schavernoch, H.: Die Harmonie der Sphären - Die Geschichte der Idee des Weltenklangs und der Seeleneinstimmung. Freiburg/München 1981, S 45
2. Waerden, B.L. van der: Die Pythagoreer - Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft. Zürich 1979, S 369 f

nach harmonikalen Gesetzen und Proportionen geschaffen ist, stellen diese vier Grundelemente zugleich auch die Grundpfeiler des kosmischen Baus sowie die Quelle und Wurzel allen Lebens dar. Setzt man statt der Zahlen bestimmte Saiten und Noten ein, entsprechend der antiken Bezeichnung, nämlich 6 für Hypate *e*, 8 für Mese *a*, 9 für Trite *h* und 12 für Nete *e'*, dann wird klar, was das nachstehende Fragment des Pythagoreers Philolaos (4.Jh.v.Chr.) meint: *Der Umfang der Oktave (Harmonia) begreift in sich die Quarte und die Quinte. Die Quinte ist aber um einen Ganzton größer als die Quarte. Denn von der Hypate* e *bis zur Mese* a *ist eine Quarte, von der Mese zur Nete* e' *eine Quinte, von der Nete zur Trite* h *eine Quarte, von der Trite zur Hypate eine Quinte. Zwischen Trite und Mese liegt ein Ganzton. Die Quarte aber ist das Verhältnis 3:4, die Quinte 2:3, die Oktave 1:2. So besteht die Oktave aus fünf Ganztönen und zwei Halbtönen, die Quinte aus drei Ganztönen und einem Halbton, die Quarte aus zwei Ganztönen und einem Halbton.*[3]

Die Besonderheit der Zuordnung von Proportionen zu Grundintervallen besteht darin, daß dem Nacheinanderausführen zweier Tonschritte das Multiplizieren der zugeordneten Verhältniszahlen entspricht, was mathematisch gesehen ein Homomorphismus der additiven Intervallstruktur in die multiplikative Proportionenstruktur ist. So gilt z.B. für die Oktave bzw. für die Quinte:

Oktave	=	Quinte	+	Quarte	Quinte	=	Gr.Terz	+	Kl.Terz
1/2	=	2/3	·	3/4	2/3	=	4/5	·	5/6

Die Bedeutung der Proportion 6:8 = 9:12 für die griechische Musiktheorie hängt eng mit den drei Medietäten, d.h. dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel, und der Zweiteilung von Intervallen zusammen. Die drei Mittel in der heute üblichen Schreibweise lauten:

Arithmetisches Mittel $A(a,b)$: $A = \frac{a+b}{2}$

Geometrisches Mittel $G(a,b)$: $G = \sqrt{ab}$

Harmonisches Mittel $H(a,b)$: $H = \frac{2ab}{a+b}$

3. Diels, H.: Die Fragmente der Vorsokratiker. Berlin 1974, 44b 6 I, S 409 f

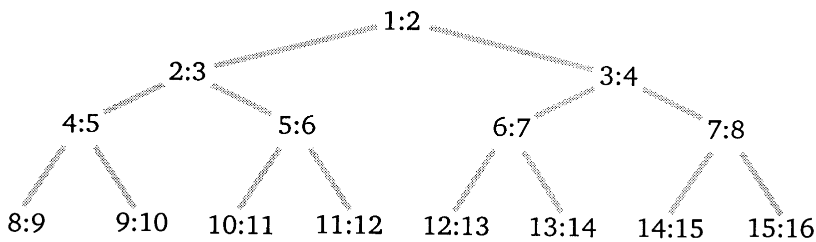
Die Griechen bevorzugten allerdings eine symmetrische Schreibweise, wodurch auch die Ähnlichkeiten der Mittel zueinander leichter erkennbar werden:

$$a - A = A - a \qquad \frac{a}{G} = \frac{G}{b} \qquad \frac{1}{a} - \frac{1}{H} = \frac{1}{H} - \frac{1}{b}$$

Will man die Oktave 1:2 in zwei möglichst große Teilintervalle gliedern, so genügt es das arithmetische bzw. das harmonische Mittel zu bilden, denn es ist: A = 3/2 und H = 4/3, was in der Tat mit der Gleichung 2/1 = 3/2 · 4/3 übereinstimmt. Das ist aber keine allgemeine Methode, um ein beliebiges Intervall a:b in zwei möglichst große Teilintervalle zu teilen. Denn bildet man das arithmetische und harmonische Mittel z.B. aus der Proportion der Quinte (3:2),
so ergibt sich: A = 5/3 und H = 12/5 ,
was in Widerspruch zur Gleichung 3/2 = 5/4 · 6/5 ist.
Es genügt im allgemeinen also nicht, einfach das arithmetische und das harmonische Mittel zu bilden, um ein Zweiteilung eines Intervalls zu erreichen. Für ein beliebiges Intervall a:b erhält man aber das 1. bzw. 2. Teilintervall indem man a:A (oder b:A) und a:H (oder b:H) bildet. Auf diese Weise erhält man z.B. für die Oktave, Quinte und Quarte nachstehende Teilintervalle:

Intervallproportion:	Oktave (1:2)	Quinte (2:3)	Quarte (3:4)
1., 2. Teilintervall:	(2:3), (3:4)	(4:5), (5:6)	(6:7), (7:8)

Man sieht darin sofort eine einfache Gesetzmäßigkeit enthalten und braucht gar nicht erst das arithmetische und harmonische Mittel zu berechnen, wenn man die Zweiteilung der Intervalle nach dem Schema von Archytas von Tarent, dem wohl bedeutendsten pythagoreischen Musiktheoretiker, anordnet:



usw.

Während die Oktave durch das arithmetische und harmonische Mittel in zwei ungleiche Teile gegliedert wird, nämlich in Quinte (2:3) und Quarte (3:4), teilt das geometrische Mittel die Oktave im Verhältnis 1:2 in zwei gleich große Teile. D.h. die Oktave läßt sich innerhalb der rationalen Zahlen nicht in zwei gleich große Teilintervalle zerlegen. Nach der Vorstellung der ersten Pythagoreer sollten sich alle musikalischen Intervalle durch Verhältnisse von natürlichen Zahlen ausdrücken lassen. Also auch hier sind die Pythagoreer bereits auf die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ gestoßen, als sie versuchten die Oktave in gleiche Teilintervalle einzuteilen, und nicht nur bei der Bestimmung der Diagonale des Einheitsquadrats. Im Zusammenhang mit den drei Mitteln ist die sog. "Goldene Proportion", die als die vollkommenste galt, interessant, da sie gleichsam eine Art Kompromiß zwischen den drei Mitteln darstellt: $a : A = H : b$ (oder auch $a : H = A : b$).

Diese Struktur ähnelt der geometrischen Proportion, wobei aber die beiden Innenglieder im Gegensatz zu dieser nicht gleich sind, sondern verschieden. Die beiden G's in der geometrischen Proportion werden dabei ersetzt durch das arithmetische Mittel A und das harmonische Mittel H. Die Bedeutung für die Musik ergibt sich daraus, daß zwei Töne mit der Schwingungszahl a und b (Intervall a:b) sich als Außenglieder der Goldenen Proportion ansehen lasssen, die daher auch "Musikalische Proportion" genannt wird. Die Goldene Proportion mit den kleinsten natürlichen Zahlen ist $2 : 3 = 4 : 6$ mit $H=3$ und $A=4$. Die wichtigste ist aber die "Harmonia perfecta maxima": $6 : 8 = 9 : 12$.

Die Harmonie der Natur drückt sich nach Auffassung der Pythagoreer gerade in der Einheit von arithmetischen, geometrischen und harmonischen Proportionen aus, wie sie auch in der Goldenen Proportion zum Ausdruck kommt. Diese drei Mittel stellen die wichtigsten pythagoreischen Medietäten, d.h. Proportionsverhältnisse aus drei Größen, dar, wobei die mittlere Proportionale aufgrund der Verhältnisse der beiden anderen bestimmt ist. Euklid nannte solche Verhältnisse "Logos", und in diesem Sinn ist er der Maßstab alles Seienden.

Die "Einheit in der Vielfalt", wie das bereits in der ursprünglichen Bedeutung der Oktave enthalten ist, stellt zugleich die allgemeinste und kürzeste Formulierung der Harmonie dar. Harmonie setzt einerseits den Unterschied, das Verschiedene, den Gegensatz, das Andere, das Du usw. voraus; andererseits wird zugleich die Zusammengehörigkeit und Vereinigung der Gegensätze, das wesenhaft Eine betont. Schon in der griechischen Mythologie heißt die Tochter des lebensvernichtenden Gottes des

Krieges - Ares, und der lebensspendenden Göttin der Liebe - Aphrodite, Harmonia. *Sie ist als Tochter (...) die Macht der Versöhnung, der Vereinigung der Gegensätze und ihre Verwandlung in ausgewogenen Zusammenklang.*[4]

Fast in allen großen Religionen, Kosmogonien und den meisten metaphysischen Systemen, die sich mit der Frage des Ursprungs des Universums beschäftigen, begann alles, was da ist, in der Einheit, im Absoluten, in Gott. Und das Problem der religiösen Kosmogonien und Metaphysiken besteht darin, wie der Übergang von der Einheit in die Zweiheit und schließlich Vielheit der Wesenheiten, die im Universum wirksam sind, zu erklären oder zu deuten ist. Es handelt sich hier um das Urproblem aller Mythen, Religionen und Metaphysiken: dem Problem der Schöpfung oder Urzeugung. In vielen Religionen spricht man vom *Verlangen Gottes, Schöpfer zu sein, vom uranfänglichen Eros, der das Eine veranlaßt, aus seiner Einheit ein Zweites zu erzeugen.*[5]

Aus diesem Prozeß der Verdopplung oder ebenbildlichen Wiederholung des Einen entsteht die Zweiheit, oder besser die Zweieinheit, um die Verschiedenheit des Ungeschiedenen auszudrücken. Ohne hier näher auf diese Problematik einzugehen, sei nur erwähnt, daß dieses eigentlich Undenkbare und nur paradox Formulierbare von gleichzeitig Gegenteiligem und Identem, von Unterschiedlichem und Gleichem, durch die Oktave in einzigartiger Weise "verstanden" oder besser gehört und wahr-vernommen wird. Die Oktave stellt eine Ganzheit dar, insofern der Anfang (Primton) und das Ende (Oktavton) einer Tonfolge zu einer höheren Einheit zusammenfließen; und zwar in der Weise, daß der Mensch den ersten Oberton eines Grundtons - eben die Oktave - als "verjüngten Grundton", wie es der feinsinnige Bruckner-Interpret A. Halm einmal ausdrückte, wahrnimmt. Die Oktave ist die musikalische Darstellung des Verhältnisses 1:2; zwei Noten stehen in einer Oktavbeziehung, wenn die Frequenz der höheren das Doppelte der tieferen beträgt. Aufeinanderfolgende Oktavtöne besitzen also Frequenzen, die sich wie die aufeinanderfolgenden Potenzen von 2 verhalten: 1:2:4:8 usw.. Die Oktavverwandschaft der Töne ist uns so geläufig, daß wir gar nicht merken, daß sie zwei nicht etwa unmittelbar aufeinanderfolgende, sondern verhältnismäßig weit voneinander entfernte Töne sind, aber trotz dieser Entfernung miteinander so eng verwandt sind, daß wir zwischen ihnen

4. Schavernoch, H.: a.a.O., S 45
5. Rudhhyar, D.: Die Magie der Töne- Musik als Spiegel des Bewußtseins. Bern/München/Wien 1984, S.88

kaum unterscheiden. Einerseits sind z.B. der Primton c und der Oktavton c' nicht ident, und daher verschieden; andererseits rufen beide Töne im Menschen qualitativ das gleiche Gehörerlebnis hervor, was im gleichen Tonwert zum Ausdruck kommt - beide sind c's; obwohl sie verschiedene Töne sind, sind sie für unsere Ohren doch wesensgleich. Das ist ja auch der Grund, warum wir am Monochord so präzise den Steg auf die halbe Saitenlänge einstellen können, ohne einen Maßstab benützen zu müssen. Die erzielte Meßgenauigkeit ist dabei außerordentlich hoch - sie liegt bei einigen Promille, was wesentlich genauer ist, als die Bestimmung der Hälfte mit den Augen.

In gewisser Weise ist also eine Folge von Oktavtönen verschieden und doch gleich. Die Zahl 2, die normalerweise für Entzweiung, also Spaltung und Trennung steht, wie das z.B. in den Wörtern Zweifel, Zwiespalt, Zwietracht, Zwist usw. zum Ausdruck kommt, begründet in der Musik in Form des Oktavtons als Verdopplung (oder Halbierung) des Primtons eine vollkommene Konsonanz, sieht man von dem trivialen Gleichklang der Prime (1:1) ab. D. Rudhyar, der die Entwicklung der Musik als Spiegel der Evolution des menschlichen Geistes ansieht, fragt in diesem Zusammenhang: *Sind wir etwa von unserer Kultur so geprägt, daß wir zwei Klänge im Abstand einer Oktave als gleiche Note empfinden, oder ist das Gefühl angeboren, daß sie identisch sind - d.h., wurzelt es in einem intuitiven Erfassen des Wesens des metaphysisch-spirituellen Prozesses, der kein anderer als der grundlegende Prozeß kosmischen Daseins und die unmittelbare Manifestation dessen ist, was wir Leben nennen? (...) Metaphysisch ist die Oktave das grundlegendste Ganze, da sie im ersten Akt der Selbstverdopplung entsteht; alle weiteren Akte sind ebenbildliche Wiederholungen.*[6] Und E. Bindel bezeichnet das Oktavintervall als die *musikalische Urpaarheit*, weil sich im Paar von Primton und Oktavton Gegensätzliches ergänzt, also ein Ganzes bildet.

2. Harmonie und der Goldene Schnitt

Die führende Idee des Maßes kam von Pythagoras. Denn nur durch die Bewahrung eines entsprechenden Maßes werden die Dinge auch bei ständigem Wechsel erhalten. In der Tat ist dasjenige, was erkennbar ist, immer und ausschließlich die konstante Struktur, weil nur diese identifizierbar und "fest-stellbar" ist. *Der Fluß der Ereignisse ist als Veränderung in Worten nicht zu fassen, denn was sich in Begriffen wiedergeben läßt, ist*

6. Rudhyar, D.: a.a.O., S 88 f

nur die konstante Form dieser Veränderung. Wenn Heraklit sagt, man könne denselben Fluß nicht zweimal durchschreiten, weil das Wasser davonfließt, so kann er das nur sagen, weil die Form des Fließens, die Strömungsweise, die Ufer erhalten bleiben; sonst könnte man gar nicht von einem Fluß sprechen.[7]

Die Griechen bezeichneten den Kosmos als schön, weil er in seiner Ordnung und seinen Maßverhältnissen erkennbar ist. In der Natur werden alle Dinge nach Gesetz und Maß verwandelt und was die Naturprozesse betrifft, so entsprechen sie alle ihren Maßen. Das Ungerechte liegt nach Heraklit nicht im Kampf der Gegensätze, sondern in der Mißachtung der Maße. *Die Sonne wird ihre Maße nicht überschreiten, und wenn sie es doch täte, würden die Erinnyen, die Dienerinnen der Gerechtigkeit, schon zupacken.*[8]

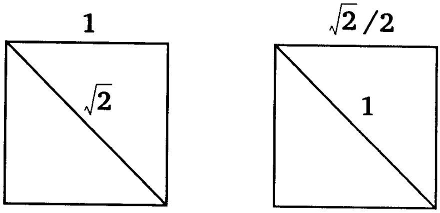
Wir erwähnten bereits, daß ursprünglich bei den Pythagoreern nur rationale Verhältnisse betrachtet wurden; sie schwelgten im Gedanken der ganzzahligen Erfaßbarkeit des Universums - wohl nicht zuletzt wegen der Versuche am Monochord - und glaubten, die Geheimnisse der Natur bestünden in rationalen Verhältnissen. Doch dieser Glaube wurde jäh unterbrochen durch die Entdeckung der irrationalen Länge für die Diagonale eines Quadrates (das unmittelbar aus dem Pythagoras zugeschriebenen Lehrsatz folgt, wonach das Quadrat über der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten ist). Diese Entdeckung führte zu jenem Skandal unter den Anhängern der Pythagoreer, der schließlich die Anhängerschaft in die Akusmatiker und Mathematiker spaltete. Die Diagonale kann mit der Seite nicht "gemessen" werden; sie besitzt mit der Seite kein gemeinsames Maß. Der Ausdruck "irrational" dürfte auf diese erste Krise der Mathematik zurückgehen, und der griechische Begriff "irrational" ist daher eher mit "maßlos" als mit "vernunftlos" zu übersetzen - zumindest bei Pythagoras.

Die Zahl $\sqrt{2}$, die Länge der Diagonale eines Quadrats ist "alogos", unaussprechbar. Gemäß einem alten Scholion zum zehnten Buche der Elemente Euklids soll der Legende nach jener Mann, der zuerst die Betrachtung des Irrationalen aus der Verborgenheit in die Öffentlichkeit brachte, durch einen Schiffbruch umgekommen sein, weil das Unaus-

---

7. Sachsse, H.: Was bedeutet Symmetrie?, in: Symmetrie, Hrsg. Stork, H., Köln 1985, S.12
8. zit. aus Russel, B.: Denker des Abendlandes - Geschichte der Philosophie in Wort und Bild. Berlin/Darmstadt/Wien 1970, S 26

sprechliche und Bildlose für immer hätte verborgen bleiben sollen. Und der Übeltäter, der dieses Bild des Lebendigen berührte und aufdeckte wurde an jenen Ort der Entstehung, also ins Nichts, aus dem er gekommen, zurückversetzt. Die Zahl $\sqrt{2}$ und andere derartige Zahlen sind entsprechend diesem Scholion bildlos bzw. höchstens ein Bild des Lebendigen selbst, das auch irrational ist, also jeder ratio, jeder zergliedernden und regelnden Vernunft spottet. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational, aber das bedeutet keineswegs, daß die Quadratdiagonale deswegen keine wirkliche Länge besitzt oder vielleicht gar an den Enden irgendwie zerfasert oder zerfranst ist. Vielmehr kann man von der Diagonale als Einheit ausgehen, und dann erhält man für die Seitenlänge des Quadrats $\sqrt{2}/2$; jetzt sind also die früher rationalen Katheten irrational. D.h. zwei Längen für sich sind weder rational noch irrational, sondern sie sind dies nur relativ zueinander; sie besitzen entweder ein gemeinsames oder kein gemeinsames Maß.



Neben der $\sqrt{2}$ sind die Pythagoreer bei ihren geometrischen Forschungen noch auf andere Irrationalitäten gestoßen, wie z.B. bei der Erforschung des regulären Fünfecks. Es gehört zur Ironie der Geschichte, daß die Pythagoreer ausgerechnet am Sternfünfeck, dem Pentagramm oder Drudenfuß, dem heiligen Symbol, Wappen und Erkennungszeichen der pythagoreischen Bruderschaft, ebenfalls auf die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale stießen, und damit auf den später so bezeichneten "Goldenen Schnitt".

Der Goldene Schnitt ist seit alters her zutiefst mit der Vorstellung der Harmonie verbunden. Obgleich wir jetzt die nüchterne mathematische Definition des Goldenen Schnitts an den Beginn der weiteren Ausführungen stellen könnten, knüpfen wir an die früher gegebene allgemeine Definition der Harmonie als Einheit in der Vielfalt an und versuchen diese Vorstellung auf denkbar einfachste Weise zu konkretisieren, indem wir von einer beliebigen Strecke ausgehen und diese als Einheit zugrunde legen. Diese Einheitslänge gliedern wir in zwei Teilstrecken, welche die Minimalanzahl der Vielheit darstellt. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten eine Strecke in zwei Teile zu teilen, wohingegen nur eine einzige Möglichkeit besteht, eine Strecke in zwei Hälften zu zerlegen. Da die Länge das einzige Unterscheidungsmerkmal zwischen Strecken ist, würden sich die beiden Teilstrecken im Fall der Halbierung durch nichts unterscheiden, sie wären gleich oder uniform. Die Zweiheit, die wir so erhalten, ist nur Gleichheit und daher nicht Repräsentant der Vielfalt, die nicht nur Vielheit, sondern vor allem auch Verschiedenartigkeit meint. Um der Vielfältigkeit schon in der Zweiteilung genüge zu tun, ist es nötig, die Einheitsstrecke in zwei verschieden lange Teilstrecken zu unterteilen. Doch, wie schon erwähnt, gibt es unendlich viele Möglichkeiten, die Strecke asymmetrisch zu teilen, sodaß zunächst kein Grund vorliegt, irgendeiner Teilung den Vorzug zu geben. Doch Vielfältigkeit ist nur der eine Pol in der Harmoniedefinition; was noch fehlt, ist der Bezug zum anderen Pol, zum Einen, zum Ganzen - in diesem Fall zur Gesamtstrecke.

Es gilt also einen Weg zu finden, der zwar den Gegensatz zwischen Gleichheit und Verschiedenheit nicht nivelliert und doch diese beiden Gegensätze miteinander versöhnt. Die beiden Teilstrecken sollen nicht nur zueinander in einem bestimmten Verhältnis stehen, sondern ihrerseits einen Bezug zur Gesamtstrecke haben. Eine Halbierung der Strecke führt nur zu gleichen Teilen und diese stehen miteinander im gleichen, zum Ganzen aber im ungleichen Verhältnis. In der streng durchgeführten Gleichheit der Teile liegt notwendig eine Disproportionalität des Ganzen, d.h. eine unversöhnliche Differenz zwischen den beiden Verhältnissen, nämlich dem des Ganzen zu seinen Teilen einerseits und dem der Teile zueinander andererseits. Wirkliche Harmonie bedeutet aber, neben dem Streben nach Mannigfaltigkeit stets am ursprünglichen Einheitsprinzip festzuhalten, was im Falle der Streckenteilung dadurch geschieht, daß man zwar die Einteilung des Ganzen in zwei gleiche Teile aufgibt und damit die Ungleichheit zuläßt, aber anstelle der Gleichheit der Teile die Gleichheit der Verhältnisse treten läßt.

Die Frage ist daher, wie man die Gesamtstrecke teilen muß, damit der kleinere Teil m sich zum größeren Teil M genauso verhält wie der größere Teil zur Gesamtstrecke M+m. D.h. das Verhältnis der einzelnen Teile wird maßgeblich (= Maß gebend) von der Einheit, vom Einen mitbestimmt. Es ist wichtig hier sowohl das Ganze als auch die Teile zugleich zu sehen und weder dem Ganzen noch den Teilen den Vorrang einzuräumen. Daher hieß es vorhin auch "mitbestimmt" und nicht einfach "bestimmt", um die gleichrangige Rolle von Teil und Ganzem hervorzuheben. Entscheidend ist nämlich, daß die Teile zueinander nicht bloß komplementär sind im Sinne einer additiven Ergänzung zur Gesamtlänge - dies trifft ja für jede beliebige Zweiteilung einer Strecke zu - sondern daß sie in einer ganz bestimmten Beziehung zur Gesamtstrecke stehen. Im buchstäblichen Sinne gilt auch hier der alte Weisheitsspruch, wonach das Ganze mehr ist als die Summe der Teile. Das Ganze erscheint hier nicht bloß als die Summe gleicher oder beliebiger Summanden, sondern ist das Ergebnis der Vereinigung zweier maßvoll ungleicher Teile, woraus die harmonische Verbindung der Teile untereinander und zum Ganzen resultiert. Erst ein spezielles Verhältnis der Teile untereinander und zum Ganzen gestattet, daß inmitten der Verschiedenheit zugleich die Einheit gewahrt bleibt und ein wirklicher Zusammenhang zwischen Ganzem und seinen Gliedern hergestellt wird.

Versucht man das bisher Gesagte aus der Sphäre der Allgemeinheit direkt in das Gebiet der mathematischen Bestimmtheit überzuführen, so erhält man folgende Proportion: $m : M = M : (m+M)$. Da aber die Gesamtstrecke zugleich die Einheitslänge darstellt, d.h. $m+M = 1$, gilt: $m : M = M : 1$. Das ist das Proportionalgesetz des Goldenen Schnitts, in welchem sich der kleinere Teil m (Minor) zum größeren Teil M (Major) so verhält wie letzterer zur Gesamtlänge. Aufgrund der vermittelnden Funktion des Majors zum Ganzen einerseits und zum Minor andererseits wird er auch die “mittlere Proportionale” oder “Medius” genannt. Dieses Verhältnis bildet in der Tat die befriedigendste Vermittlung zwischen der völligen Gleichheit und einer allzu großen Verschiedenheit der Teile, und stellt dadurch den natürlichsten Übergang von der Einheit zur Zweiheit bzw. Vielheit her, wenn man die Teile selbst wieder entsprechend dieser Proportion unterteilt. Der Goldene Schnitt ist im buchstäblichen Sinn der maßvolle Ausdruck des Gegensatzes von Einheit und Vielfalt, von Gleichheit und Verschiedenheit, zumal die Glieder nicht extrem verschieden und auch nicht total gleich sind, sondern in Maßen gleich und in Maßen verschieden.

Interessant ist in diesem Zusammenhang jene Stelle im Timaios, wo Platon auf das Wesen der stetigen Proportion (z.B. die arithmetische $8-5 = 5-2$, oder die geometrische $2:4 = 4:8$) eingeht, um die Vermittlung der beiden entgegengesetzten Elemente Feuer und Erde durch ein mittleres Element, wie Luft oder Wasser, zu erklären. Er schreibt dort, im Kapitel VII: *Daß zwei Dinge allein sich ohne ein drittes auf eine schöne Art zusammenfügen, ist unmöglich; denn in der Mitte muß irgendein beide verknüpfendes Band sein. Der Bänder schönstes aber ist das, welches sich und das Verbundene so viel als möglich zu Einem macht. Das aber kann die Pro-*

portion (analogia) am besten vollbringen. Denn wenn von irgend drei Zahlen die mittlere sich zu der kleinsten verhält, wie die größte zu der mittleren selbst und umgekehrt, die kleinste zu der mittleren wie die mittlere zur größten, dann wird das Letzte und das Erste das Mittlere und das Mittlere Erstes und Letzes, alles wird also mit Notwendigkeit dasselbe, und da es dasselbe wird, bildet es ein Einziges.[9]

Die nüchterne mathematische Bezeichnung für den Goldenen Schnitt heißt stetige Teilung, weil eine Strecke $\overline{AB}$ in C stetig geteilt wird, wenn $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{CB}$ ist. Geometrisch erhält man diesen Punkt, indem man die halbe Strecke $\overline{AB}$ senkrecht in B aufträgt und diesen neuen Punkt D mit A verbindet. Alsdann trägt man die halbe Strecke $\overline{AB}$ von D aus auf der Hypothenuse ab, und überträgt schließlich den Rest der Hypothenuse von A aus auf die ursprüngliche Strecke $\overline{AB}$. Der so erhaltene Punkt C teilt die Strecke $\overline{AB}$ stetig, d.h. im Verhältnis des Goldenen Schnitts: $\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AB}$.

Aus der Proportion des Goldenen Schnitts: m:M = M:1 ergibt sich die quadratische Gleichung: $M^2+M = 1$, wenn man bedenkt, daß $m+M = 1$ ist. Die Lösung dieser Gleichung ergibt für den Major M den Wert:

$$M = \pm\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad ,$$

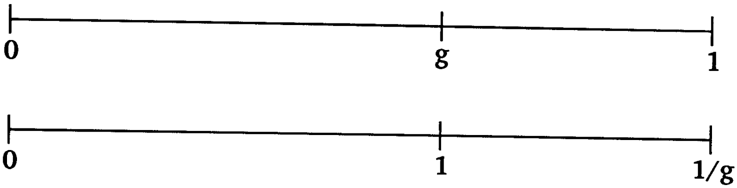
wobei für geometrische Überlegungen nur der positive Wert von Bedeutung ist. Die Lösung dieser Gleichung kann geometrisch auch so interpretiert werden: Teile eine Strecke der Länge 1 so in zwei Abschnitte, daß das Quadrat über einem Abschnitt gleich dem Rechteck aus der ganzen Seite und dem zweiten Abschnitt ist; denn es gilt:

$$M^2 = 1 \cdot (1-M)$$

Diese berühmte Zahl $(\sqrt{5}-1)/2$ - die wir fürderhin mit dem Buchstaben g bezeichnen - welche den Goldenen Schnitt beschreibt, ist irrational und hat den Wert: $g = 0.618033989...$. Sie besitzt einige interessante Eigenschaften, die wir im folgenden kurz betrachten wollen. So ergibt der Kehrwert von g, also $1/g = 1.618...$, dieselben Nachkommastellen wie g (das ist aber keine Besonderheit nur des Goldenen Schnitts, vielmehr gibt es unendlich viele Zahlen mit dieser Eigenschaft). Aufgrund der Beziehung $g^2+g = 1$ gilt: $1/g = g+1$. Geht man

9. Platon: Timaios

von der Einheitsstrecke aus und teilt diese im Goldenen Schnitt, dann hat der Major den Wert g; geht man dagegen vom Major als Einheit aus, so ergibt nun die Gesamtlänge den Wert 1/g.



Mit G = 1/g = 1,618... erhält man die Gleichung: $G^2=1+G$ bzw. $G=1+1/G$. Setzt man für den Nenner G jeweils wieder den Ausdruck $1+1/G$ ein, so erhält man den einfachsten unendlichen regelmäßigen Kettenbruch für G:

$$G = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}} \quad \ldots.$$

Analog erhält man aus der Gleichung: $G^2 = 1+G$ die unendliche Kettenwurzel, die ebenfalls nur aus Einsern besteht:

$$G = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}} \quad \ldots.$$

In dieser Darstellung tritt einmal mehr die enge Verwandschaft des Goldenen Schnitts zur Einheit, zum Einen zutage.

Berechnet man der Reihe nach die einzelnen Glieder des Kettenbruchs, indem man ihn immer später abbricht, so erhält man folgende Brüche: 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, ..., welche abwechselnd größer oder kleiner als das Verhältnis des Goldenen Schnitts sind, und je weiter man fortschreitet, desto geringer wird die Differenz; der Grenzwert dieser Folge ist der Goldene Schnitt. In der Tat sind die Zahlen 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... ebenso berühmt, wie der Goldene Schnitt selbst. Diese Zahlenfolge nennt man nach ihrem Entdecker Leonardo von Pisa, besser bekannt als Fibonacci, was "Sohn des Bonaccio" heißt, Fibonacci-Folge. Fibonacci erwähnte diese Folge erstmals im Zusammenhang mit der Entwicklung einer idealisierten Kaninchenpopulation in seinem bekanntesten Werk, dem Liber abaci, doch wurde sie erst im 19. Jahrhundert allgemein bekannt, als der französische Zahlentheoretiker E. Lucas diese Folge in seinem klassischen Werk über Unterhaltungsmathematik herausgab. Darin beschreibt er die Vermehrung von Kaninchenpaaren, beginnend mit einem Paar, welches erstmals nach zwei Monaten und von da ab jedes Monat jeweils ein Paar junger Kaninchen werfen. Die Anzahl der Paare in den aufeinander folgenden Monaten ergibt die Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … . Man erkennt, sobald die ersten beiden Glieder der Folge bekannt sind, ergeben sich die weiteren jeweils aus der Summe der beiden unmittelbar vorangehenden Glieder. Diese einfachste Folge nannte Lucas Fibonacci-Folge, und die nächst einfache Folge tauften die Mathematiker Lucas-Folge: 1, 3, 4, 7, 11, 18, … . Bei der verallgemeinerten Fibonacci-Folge kann mit irgend zwei positiven Zahlen begonnen werden, und jedes weitere Glied ergibt sich einfach aus der Summe der beiden vorhergehenden Zahlen. Auch in diesen Fällen nähert sich die Folge, die aus den Quotienten zweier benachbarter Zahlen gebildet wird, dem Verhältnis des Goldenen Schnitts als Grenzwert. Das entscheidende an diesem Verhalten liegt also nicht in den beiden Ausgangszahlen F_0 und F_1, sondern im speziellen Algorithmus, der durch die einfache Rekursionsregel gegeben ist:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Die enge Beziehung der Fibonacci-Folge zum Goldenen Schnitt erkennt man leicht in der folgenden Formel von Binet für die n-te Fibonacci-Zahl:

$$F_n = \frac{(1+g)^n - (-g)^n}{1+2g} = \frac{G^n - G^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Die Bedeutung und Faszination, die dieses Zahlenfolge seit jeher auf Berufsmathematiker ebenso wie auf Amateurmathematiker ausübt (seit 1963 existiert eine eigene Zeitschrift, The Fibonacci Quaterly, die sich hauptsächlich mit verallgemeinerten Fibonacci-Zahlen und dazu verwandten Zahlen beschäftigt), basiert nicht zuletzt darauf, daß man darin eine schier endlose Anzahl merkwürdiger Zusammenhänge entdecken kann. Gleichsam als Kostprobe seien einige angeführt:

a) $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \dots F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

b) $F_{n+1} \cdot F_{n-1} = (-1)^n + F_n^2$

c) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

Und auch in der Natur und Technik treten die Fibonacci-Zahlen immer wieder an unerwarteter Stelle auf. So stellte sich ihre Nützlichkeit vor einigen Jahren in der Technik der Computerprogrammierung heraus, etwa was das Sortieren von Daten, Wiederauffinden von Informationen, Erzeugen von Zufallszahlen betrifft, oder sogar die Methoden zur Annäherung von Maxima und Minima komplizierter Funktionen, von denen man keine Ableitung kennt[10]. Wir kommen später noch einige Male auf die Bedeutung des Goldenen Schnitts und der Fibonacci-Zahlen in der Natur zurück. Nun wollen wir uns noch mit einer anderen interessanten Eigenschaft des Goldenen Schnitts auseinandersetzen, nämlich mit der Entdeckung, die erst in unserer Zeit gemacht wurde und mit dem Grad der Irrationalität des Goldenen Schnitts zu tun hat.

Der Goldene Schnitt ist nämlich die irrationalste Zahl aller Zahlen. Um diese Aussage zu verstehen, müssen wir kurz erläutern, was mathematisch unter dem Grad der Irrationalität zu verstehen ist. Bekanntlich kann man jede reelle Zahl in Form eines Dezimalbruchs darstellen und insbesondere läßt sich jede solche Zahl beliebig genau durch eine rationale Zahl annähern. So ist z.B. 314/100 eine auf die 2. Dezimalstelle genaue Approximation von $\pi \cong 3.14$. Aber diese Approximation ist keineswegs die einzige und schon gar nicht die bestmögliche bei vorgegebener Anzahl der Ziffern im Zähler und Nenner. Vielmehr kann man jede Zahl a durch einen Kettenbruch darstellen, also in der Form:

$$a = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + 1}}} \quad \dots.$$

wobei die a_i ganze, im allgemeinen sogar natürliche Zahlen sind. Üblicherweise schreibt man diesen Kettenbruch in der kompakteren Form

$$a = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots] .$$

10. Gardner, M.: Mathematischer Zirkus. Darmstadt 1979, S 168

In dieser Schreibweise ergibt sich für π: $\pi = [3, 7, 15, 1, ...]$. Bricht man diesen Kettenbruch nach endlich vielen Stellen ab, so bekommt man für π mit wachsender Genauigkeit die nachstehenden rationalen Approximationen: 3, 22/7, 333/106, 355/113, ... Das Entscheidende an der Kettenbruchdarstellung liegt nun darin, daß nicht nur jede reelle Zahl auf diese Weise eindeutig dargestellt werden kann, sondern daß dieser Algorithmus eine Folge von Zahlen liefert, die am raschesten gegen die vorgegebene reelle Zahl konvergieren, d.h. er ist der effektivste Algorithmus. Konkret heißt das etwa im Falle von π, daß z.B. kein Bruch p/q mit Nenner q unterhalb 113 näher an π herankommt als der Quotient 355/113.

Bricht man den Kettenbruch an der n-ten Stelle ab, so erhält man folgende Kettenbruchaproximation für die reelle Zahl a:

$$a = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = p_n/q_n ,$$

mit ganzen Zahlen p_n und q_n. Nach einem Satz von Liouville läßt sich die Güte der Näherung als Abstand zwischen a und p_n/q_n abschätzen:

$$|a - p_n/q_n| < 1/\,(q_n^2\, a_{n+1}) \,.$$

Dieser Satz zeigt, daß a von den Näherungskettenbrüchen umso besser approximiert wird, je größer die a_{n+1} sind. Umgekehrt bedeutet dies, daß eine reelle Zahl a umso schlechter angenähert wird, desto kleiner die a_{n+1} sind, und da die kleinstmöglichen Werte $a_{n+1} = 1$ sind, ergibt sich die schlechteste Konvergenz für

$$G = [1,1,1,1, \dots] ,$$

den Goldenen Schnitt. Aufgrund der kleinstmöglichen Kettenbruchentwicklung kann somit der Goldene Schnitt als die irrationalste aller Zahlen angesehen werden, weil sie die am schlechtesten durch rationale Zahlen approximierbare Zahl darstellt.[11]

Betrachtet man einerseits den Goldenen Schnitt als die irrationalste Zahl und andererseits die Oktave als die rationalste Zahl und bedenkt, daß beide Zahlen immer schon in direktem Zusammenhang mit dem Harmoniebegriff standen, dann erkennt man, daß sich diese beiden Repräsentanten der Harmonie gleichsam polar gegenüber stehen. Denn

---

11. Richter, P./ Scholz, H-J.: Der Goldene Schnitt in der Natur. in: Ordnung aus dem Chaos. Hrsg. Küppers, B-O., München/Zürich 1987, S 175

die Oktave 1:2 steht musikalisch für maximale Konsonanz, mathematisch für maximale Kommensurabilität und 1:g steht entsprechend für maximale Dissonanz bzw. Inkommensurabilität. Es mutet eigenartig an, daß gerade diese beiden Extrema mit Harmonie in Verbindung stehen. Und wie wir noch sehen werden, spielen auch in der Natur diese beiden gegensätzlichen Prinzipien eine große Rolle. Genauso wie es neben der Oktave noch die anderen rationalen Zahlen p/q mit kleinen ganzen p und q gibt, wie die Intervalle Quinte (2:3), Quarte (3:4), Gr.Terz (4:5), Gr.Sexte (3:5) usw., welche ebenfalls konsonante Intervalle darstellen, genauso gibt es am irrationalen Pol der Harmonie nahe Verwandte zum Goldenen Schnitt, nämlich die sog. noblen Zahlen. Sie sind dadurch charakterisiert, daß ihre Kettenbruchentwicklung im hinteren Teil wie die von g aussieht: $x = [a_0, a_1, a_2, ..., 1,1,1,1,1,1, ...]$. Die "Pole der Harmonie" sind ihrereseits sozusagen von einem mehr oder wenigen harmonischen Bereich umgeben, wobei die Fibonacci-Quotienten 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, ... g gleichsam als Brücke zwischen den beiden Harmoniepolen fungieren.

3. Heraklit und die Harmonie der Gegensätze

Für Anaximander stellte das *"Apeiron"*, das Unendliche, Unbegrenzte und Unbestimmte die *"Arche"*, den Urgrund der Dinge dar. Um aber das Werden und Vergehen aus dem Apeiron zu verstehen, um einzusehen, wie aus Unbestimmtem und Unbegrenztem Bestimmtes und Begrenztes wird, sagt Anaximander, daß durch Aussonderung der Gegensätze aus dem Apeiron die Welt und die Dinge hervorgebracht werden und als Buße für ihre gegenseitigen Anwürfe ins Grenzenlose zurückkehren müssen. Hier wird die Grunderfordernis des menschlichen Denkens, das sich stets zwischen Gegensätzen vollzieht, zwischen Ja und Nein, Sein und Nichtsein, Wahr und Falsch, usw., und alles gedanklich Verfügbare als ein bestimmtes Verhältnis zwischen Gegensätzen darstellt, deutlich erkennbar. Aufbauend auf Anaximanders Gegensätze und Pythagoras Harmonievorstellung, entwickelte Heraklit (um 544-484 v. Chr.) von Ephesos seine Ansicht von Harmonie als den Kampf der Gegensätze und dem Gleichgewicht gegensätzlicher Strebungen. Die tönende Saite von Pythagoras und die Gegensätze Anaximanders vereinigen sich im Bild des gespannten Bogens, das Heraklit verwendet, um den Einklang entgegengesetzter Spannungen zu verdeutlichen. Und der Widerspruch ist der eigentliche Beweggrund, wodurch die Welt aufrechterhalten wird und jegliche Entwicklung in Gang kommt, denn er sagt: *Der Kampf ist* *der Vater von allem* (Gemeint ist der Kampf der Gegensätze und nicht der Krieg, wie manchmal irrigerweise übersetzt wird), *der König von allem; die einen macht er zu Göttern, die anderen zu Menschen, die einen zu Sklaven, die anderen zu Freien. Doch diese Harmonie ist nicht immer offensichtlich, denn die Physis verbirgt sich gern.*[12] Was in allem waltet, die Natur, tritt nicht offen zutage; sie hat sich hineinverborgen in das Wirkliche, das sein wahres Wesen nur verhüllt erkennen läßt. Die Wirklichkeit selbst ist widersprüchlich und all die Gegensätze in der Welt - und Heraklit wird nicht müde sie aufzuzählen: Tag - Nacht, Winter - Sommer, Krieg - Friede, Überfluß - Hunger, Leben - Tod, dürfen nicht übersprungen werden, denn sie ist die Wirklichkeit, in der der Mensch lebt. Doch die Gegensätzlichkeit ist nicht das letzte; vielmehr sind beide Seiten der Gegensätze je aufeinander bezogen und bilden nur an der Oberfläche und für den Toren einen Widerspruch, während der Weise in der Tiefe den ewig versöhnten Zusammenhang wahrnimmt.

In den nur in Fragmenten überlieferten Aussagen Heraklits heißt es denn auch: *Die verborgene Harmonie ist stärker als die offensichtliche,* oder: *Die Menschen sehen nicht, daß alles, was sich widerspricht, dadurch mit sich in Einklang kommt,* bzw.: *Aus Zwietracht entsteht Eintracht, aus Mißklang entsteht die höchste Harmonie.*[13] Und Tod und Leben bilden nur scheinbar einen Gegensatz, in Wahrheit stehen sie in inniger Berührung miteinander: *Lebend rührt er (der Mensch) an den Toten, wachend rührt er an den Schlafenden.* Und: *Unsterbliche sind sterblich, Sterbliche unsterblich; sie leben einander ihren Tod und sterben einander ihr Leben.* Heraklits Lehre von den Gegensätzen deutet darauf hin, daß Dinge, die uns als Widerspruch erscheinen, wesentliche Bestandteile der Wirklichkeit sind, ja genaugenommen die Struktur der Wirklichkeit selbst sind.

Nach Heraklit symbolisiert das Feuer am besten den ständigen Wandel der Dinge, den Prozeß des Schaffens und Vernichtens, denn die ganze Welt vollzieht sich als ein Prozeß des Austauschs, wie die Flamme einer Öllampe, die wie Bleibendes aussieht, obschon sie fortwährend Öl in Flamme und Ruß verwandelt. Im Gegensatz zu Parmenides, für den das Sein ein vollkommen unbewegtes, ewig in sich ruhendes Prinzip darstellt, in dem Werden und Vergehen unmöglich sind, hebt Heraklit das Prozeßhafte der Natur hervor, und wenn er auf die Einheit blickt, läßt er die Vielheit nicht, wie sein philosophischer Gegenspieler, im wesenlosen Schein hinter sich, sondern rettet die widerspruchsvolle

12. Heraklit: Fragmente
13. Heraklit: Fragmente

Wirklichkeit in das lebendig verstandene Eine. Darin gründet auch die große Bewunderung Hegels für den "tiefsinnigen Heraklit". Für Heraklit gleicht das Feuer dem Logos, der höchsten Vernunft, jenem allgemeinsten Ordnungsprinzip, das selbst Einheit und Vielheit, Dauer und Wechsel ist. Und gerade weil der Logos selbst ein bewegendes Prinzip ist, ist allein er von Dauer und ewigem Bestand. Der Logos ist die verborgene Harmonie, die zeitlose Einheit, der unablässig Widersprüche und Gegensätze in zeitgebundenem Streit hervorbringt und alles im Fluß hält, während es sich selbst gleichbleibt. Der Gedanke, daß der Wechsel das ewig Dauernde sei, kommt auch in der Metapher vom Fluß zum Ausdruck: *Du kannst nicht zweimal in denselben Fluß steigen, denn frische Wasser fließen immer auf dich zu.* Und: *Wir steigen und wir steigen nicht in den selben Fluß; wir sind und wir sind nicht darin.*[14] B.Russel bemerkt hierzu: *'Wir sind und wir sind nicht' ist eine geheimnisvoll verborgene Art der Feststellung, daß die Einheit unserer Existenz in ständigem Wechsel, oder - wie später Platon es ausdrückte - daß unser Sein ein unaufhörliches Werden ist.*[15] So kann Heraklit schließlich vom Logos, das das höchste Gemeinsame alles geordneten Verstehens repräsentiert, sagen: *Aus allem wird eins und aus einem wird alles.* Oder noch kürzer: *Sich wandelnd ruht es.*[16]

4. Kepler und die Harmonie der Welt

Johannes Kepler's Leben (1571-1630) fällt in die Zeit der Wende zur Neuzeit und dementsprechend waren seine epochalen astronomischen Entdeckungen einerseits eingebettet in ein philosophisch, ja religiös zu nennendes Erkenntnisinteresse und andererseits war er bemüht seine kosmischen Visionen mit naturwissenschaftlichen Methoden zu begründen. Er versuchte die auseinanderstrebenden Extreme des abendländischen Geistes wieder zusammenzufügen, indem er ein Weltbild schuf, das naturwissenschaftliche Exaktheit, poetische Schönheit und religiöse Sehnsucht wie ganz selbstverständlich und natürlich in sich vereint. In diesem Sinne knüpfte er direkt an die alten Griechen und insbesondere an das Gedankengut der Pythagoreer an, indem er Wissenschaft und Religion zusammendachte und zusammenfühlte.

Kepler war zeit seines Lebens erfüllt von dem Gedanken an die Har-

---

14. Heraklit: Fragmente
15. Russel, B.: a.a.aO., S 25
16. Heraklit: Fragmente

monie der Welt und suchte nach einem *das Werk der Wissenschaft und des Menschen, der Natur und des Schöpfers* umfassenden rationalen Prinzip, nach einer Art "Weltformel", wie W. Gerlach schreibt, wobei Kepler *eine 'Aristotelische Metaphysik' und erst recht 'Zahlenmystik' weit von sich weist,* was aber wiederum nicht ausschließt, daß er sich neben seinen astronomischen Studien auch astrologischen Fragestellungen widmete. Aus der Erfahrung abzuleitende harmonische Zahlenbeziehungen sollen alles das bestimmen und verbinden, *was mit den Sinnen erfaßt und was mit dem Geist erkannt wird.*[17] Es ging Kepler bei all seinen Arbeiten um den Nachweis, daß bei der Schöpfung des Universums die vollkommene Harmonie, der göttliche Plan, vorhanden war, den zu ergründen er als seine ureigenste Aufgabe ansah, d.h. herauszufinden, wie und nach welchen Regeln dieser Plan Gottes aufgebaut ist.

In Graz stieß er bei seinem Studium der Mathematik auf die Pythagoreer, welche die auf der Geometrie beruhende Astronomie als Schwesterwissenschaft der Harmonik betrachteten, und er lernte die für die Pythagoreer so wichtige Lehre von den Zahlenproportionen kennen. Kepler versuchte den vielleicht noch zu esoterischen Begriff der Harmonie der Pythagoreer durch geometrische Überlegungen in den Griff zu bekommen. Ein geeignetes Maßverhältnis, welches die Harmonie bestimmt, ist der sog. Keplerquotient, eine rationale Zahl p/q, wobei p und q möglichst kleine natürliche Zahlen sind. Kepler beruft sich dabei auf die pythagoreische Entdeckung, derzufolge musikalische Intervalle durch Längenverhältnisse schwingender Saiten ausgedrückt werden können; daß also das Konsonieren von Tönen mit den Konstruieren von Längen in unmittelbarem Zusammenhang steht. Er konstruiert auf diese Weise einen "Stammbaum der Harmonien", oder anders ausgedrückt: einen "Baumgraph" der harmonikalen Zusammenhänge, der neben der "Wißbarkeit", wie sich Kepler auszudrücken pflegt, d.h. der konstruierbaren regulären Kreisteilung mit Zirkel und Lineal - den klassischen mathematischen Werkzeugen - und der Intervallbeschränkung auf eine Oktave noch auf folgender Vorstellung beruht: Proportionen sind nur dann für konsonante Intervalle brauchbar, wenn die nachstehenden Verhältnisse:

Teil (T) zum Ganzen (G):	T/G,
Teil (T) zum Rest (R):	T/R,
Rest (R) zum Ganzen (G):	R/G

17. Gerlach, W.: Keplerus Mathematicus: Zur vierhundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Phys. Bl. 12, 1971, S 535

durch konstruierbare (wißbare) Vielecke (wie Zweieck, Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck und Achteck), erhalten werden. Dabei scheidet das nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbare Siebeneck aus.[18] Führt man diese Verhältnisse für die einzelnen wißbaren Vielecke aus, so erhält man folgende Tabelle:

Wißbares Vieleck		T/G	T/R	R/G	Intervall	G(R/G)
Zweieck	⬭	1/2	1/1	1/2	Oktave	2
Dreieck	△	1/3	1/2	2/3	Quinte	4
Viereck	□	1/4	1/3	3/4	Quarte	5
Fünfeck	⬠	1/5	1/4	4/5	Gr.Terz	7
		2/5	2/3	3/5	Gr.Sexte	7
Sechseck	⬡	1/6	1/5	5/6	Kl.Terz	8
Achteck	⯃	3/8	3/5	5/8	Kl.Sexte	8

Dabei konstituiert das Verhältnis R/G die sieben Urharmonien: Oktave (1:2), Quinte (2:3), Quarte (3:4), Gr.Terz (4:5), Gr.Sexte (3:5), Kl.Terz (5:6), Kl.Sexte (5:8). Das "Eineck" und damit das Intervall 1:1, Prime (Unisono) zählt Kepler nicht zu den Urharmonien. Auf die letzte Spalte G(R/G) kommen wir später im Zusammenhang mit Euler zu sprechen. Das Besondere an diesen Verhältnissen ist, daß - nimmt man die Prime hinzu - jeweils zwei davon zueinander komplementär sind, d.h. sich zur Oktave (1:2) ergänzen:

Prime	(1:1)	-----	Oktave	(1:2)	$(1:1) \cdot (1:2) = (1:2)$
Kl.Terz	(5:6)	-----	Gr.Sexte	(3:5)	$(5:6) \cdot (3:5) = (1:2)$
Gr.Terz	(4:5)	-----	Kl.Sexte	(5:8)	$(4:5) \cdot (5:8) = (1:2)$
Quarte	(3:4)	-----	Quinte	(2:3)	$(3:4) \cdot (2:3) = (1:2)$

In der Geometrie sah Kepler eine apriorische und archetypische Grundlage auch für die Schöpfung Gottes, und weil sie gleichsam Gott als Muster gedient hat, kann auch nur sie den Menschen als Gottes Ebenbild zur Erkenntnis des im "Buch der Natur" enthaltenen Schöpfungsplanes führen. Auf der Suche nach den geometrischen Archetypen, welche unserem Planetensystem zugrunde liegen, war es für Kepler's

18. Adam, A.: Keplers Harmonikalismus in der zeitgenössischen Wissenschaft. in: Mensch und Kosmos, Hrsg. Seipel, W., Linz 1990

"geometrisch informierte Seele" daher naheliegend von den ebenen Figuren des Kreises und den regulären Polygonen zu räumlichen Körpern wie Kugel und reguläre Polyeder überzugehen. Da der Kosmos ein dreidimensionaler Körper ist, müßten auch seine Proportionen durch ausgezeichnete dreidimensionale Körper bestimmt sein. Und da zu Keplers Zeiten gerade sechs Planeten mit fünf Zwischenräumen bekannt waren, kam Kepler auf die "phantastische Idee" die Abstände der Planeten mit den fünf regulären Platonischen Körpern in Verbindung zu bringen. *Gott hat bei der Erschaffung der Welt Geometrie betrieben, indem er zur Abmessung des Kosmos die fünf regulären Körper zu Hilfe nahm,*[19] schreibt er in seinem Erstlingswerk "Mysterium cosmographicum" (Weltgeheimnis), das er 1596 erst 25-jährig veröffentlichte. Kepler glaubte eine Lösung gefunden zu haben auf die Frage, warum es gerade sechs Planeten gibt und wieso sie in diesem Muster angeordnet sind, indem er die fünf Platonischen Körper in einer bestimmten Weise ineinanderschachtelte - in der Reihenfolge Okta-, Ikosa-, Dodeka-, Tetra- und Hexaeder - die von Kugeln ein- bzw. umbeschrieben wurden. *Die Erde ist das Maß für alle anderen Bahnen. Ihr umschreibe ein Dodekaeder; die dieses umspannende Sphäre ist der Mars. Der Marsbahn umschreibe ein Tetraeder; die dieses umspannende Sphäre ist der Jupiter. Der Jupiterbahn umschreibe einen Würfel; die diesen umspannende Sphäre ist der Saturn. Nun lege in die Erdbahn ein Ikosaeder; die diesem einbeschriebene Sphäre ist die Venus. In der Venusbahn lege ein Oktaeder; die diesem einbeschriebene Sphäre ist der Merkur.*[20] In diesem Zusammenhang zwischen Geometrie und Astronomie sah Kepler den a-priori Beweis für die Richtigkeit des kopernikanischen Systems. Das Interessante daran ist, daß die auf diese Weise bestimmten Abstände der einzelnen Planeten von der Sonne sich für damalige Zeiten mit verblüffender Genauigkeit ergaben, und es mutet auch heute noch recht eigenartig an, daß dieses Anordnungsschema die wirklichen Abstandsverhältnisse der Planeten so schlecht nicht wiedergibt.

Aber auch Kepler mußte später einsehen, daß dieses Modell so nicht stimmen kann, da er selbst aufgrund der genauen Beobachtungsdaten von Tycho Brahe schließlich herausfand, daß die Planeten streng genommen gar keine Kreisbahnen sind, sondern Ellipsenform besitzen. Er hatte bei Brahe gelernt, daß der Schöpfungsplan Gottes nicht so ein-

19. Kepler, J.: Das Weltgeheimnis. Mysterium cosmographicum, übersetzt v. M Caspar, Augsburg 1923
20. zit. aus Gerlach, W./ List, M.: J. Kepler, Dokumente zu Lebenszeit und Lebenswerk, München 1971

fach ist, wie er sich ihn im “Mysterium cosmographicum” vorgestellt hatte. In seinem 1619 erschienen Hauptwerk “Harmonices mundi libri V” (Weltharmonik) glaubte er schließlich den eigentlichen Grund für die Ellipsenbahnen in den harmonikalen Verhältnisseen zwischen den Extremgeschwindigkeiten der Planeten gefunden zu haben. Er stellte fest, daß die Winkelgeschwindig keiten an den Extrempunkten der Ellipsenbahnen, dem sonnennächsten (Perihel) und dem sonnenfernsten (Aphel), einfache Verhältnisse darstellen, welche musikalischen Intervallen entsprechen - “Planetenharmonien” nennt er sie. Von insgesamt 16 Intervallen sind bis auf zwei Ausnahmen alle musikalische Konsonanzen, also überwiegend Dreiklangtöne. Keplers Begründung der Ellipsenform ist also final: Die Planetenbahnen weisen Ellipsenform auf, weil erst dadurch musikalische Intervalle gebildet werden können; sie sind also eine Folge der harmonikalen Konzipierung des Sonnensystems. Diese Einstellung Keplers geht auch aus der Überschrift zum fünften Buch der Weltharmonik hervor: *Die vollkommenste Harmonie in den himmlischen Bewegungen und die daher rührende Entstehung der Exzentrizitäten, Bahnhalbmesser und Umlaufzeiten.*[21] Und ganz ähnlich heißt es in der Überschrift zum neunten Kapitel im fünften Buch: *Daß die Exzentrizitäten bei den einzelnen Planeten ihren Ursprung in der Vorsorge für die Harmonien zwischen ihren Bewegungen haben.*[22]

Seit der Antike galt die Kreisform als die vollkommenste ebene geometrische Figur und Kepler sah sich daher genötigt die Ellipsenform - als unvollkommeneres geometrisches Gebilde - zu begründen. Aber dies war in seinem Denkschema ebenfalls nur möglich unter Hinweis auf Gottes Schöpfungsidee. Er führt daher aus, daß Gott bei der Erschaffung der Welt ganz bewußt nicht die Kreisform für die Planeten wählte, weil sein eigentliches Ziel die musikalische Harmonie gewesen sei. Er schreibt in diesem Zusammenhang: *Es mußten die größeren Proportionen der Bahnen sich zugunsten der kleineren Proportionen der zur Herstellung der Harmonien erforderlichen Exzentrizitäten eine leichte Änderung gefallen lassen.*[23]

In Keplers Weltharmonik ersteht die alte Idee der Pythagoreer und Platoniker wieder in Form einer grandiosen Schau der zwischen den Pla-

---

21. Kepler, J.: Weltharmonik. Harmonices mundi libri V, übersetzt v. M.Caspar, München 1982
22. Haase, R.: Keplers Weltharmonik heute. Ahlerstedt (BRD) 1989, Reihe Esoterik des Abendlandes, Bd. 3, S 36
23. Haase, R.: a.a.O., S 36 f

netenbahnen bestehenden Harmonien, welche nur dem geistigen Ohr erkennbar ist. Dieser Harmoniegedanke, welche von Kepler erstmals im Detail und konkret ausgeführt wird, führt ihn schließlich zur Entdekkung des dritten Keplerschen Gesetzes, welches das Verhältnis zwischen den Umlaufzeiten und den Bahnradien zweier Planeten beschreibt und das von ihm erst nachträglich empirisch bestätigt wurde. Kepler, der von Anfang an Naturerkenntnis als Nachdenken und Nachvollziehen des Schöpfungsplanes Gottes begriff, wo Gottes- und Naturerkenntnis auch als Gottesdienst aufgefaßt wurde, schreibt voller Ehrfurcht vor seinem Gott am Schluß des neunten Kapitels des fünften Buches der Weltharmonik: *O Du, der Du durch das Licht der Natur das Verlangen in uns mehrest nach dem Licht Deiner Gnade, um uns durch dieses zum Licht Deiner Herrlichkeit zu geleiten, ich sage Dir Dank, Schöpfer, Gott, weil du mir Freude gegeben hast an dem, was Du gemacht hast, und ich frohlocke über die Werke Deiner Hände. Siehe, ich habe jetzt das Werk vollendet, zu dem ich berufen ward. Ich habe dabei all die Kräfte meines Geistes genutzt, die du mir verliehen hast. Ich habe die Herrlichkeit Deiner Werke den Menschen, die meine Ausführungen lesen werden, geoffenbart, soviel von ihrem unendlichen Reichtum mein enger Verstand hat fassen können.*[24]

5. Euler's zahlentheoretischer Zugang zur Harmonie

Auch Leonhard Euler (1707-1783), der große Schweizer Mathematiker, hat mehrfach einen quantitativen Zugang zur Harmonie gesucht, respektive versuchte er mit zahlentheoretischen Methoden die Gesetze der Musik durchsichtiger zu machen. Während die Pythagoreer Intervallen Zahlenverhältnisse zuordneten, verknüpft Euler in seinem nach Ptolemäus benannten Tonsystem jeden Ton mit einer Zahl; d.h. er parametrisiert die Töne durch Zahlen, die einem zahlentheoretischen Gesetz genügen. Nachstehende Tabelle ergibt die Zuordnung von Ton und Zahl innerhalb einer Oktave nach Euler:

384	400	432	450	480	512	540
c	cis	d	dis	e	f	fis
$2^7 3$	$2^4 5^2$	$2^4 3^3$	$2 \cdot 3^2 5^2$	$2^5 3 \cdot 5$	2^9	$2^2 3^3 5$

24. zit. aus Haase, R.: in: Mensch und Kosmos. Hrsg. Seipel, W., Linz 1990, S 124

576	600	640	675	720	768
g	gis	a	b	h	c'
$2^6 3^2$	$2^3 3 \cdot 5^2$	$2^7 5$	$3^3 5^2$	$2^4 3^2 5$	$2^8 3$

Alle Zahlen sind vom Typ $2^n 3^l 5^m$ $\quad l \in (0, 1, 2, 3) \quad m \in (0, 1, 2)$
Die 12 Töne c, cis, d, ... h sind genau die 12 Teiler von $3^3 5^2$:

$3^3 5^2 =$ b	$3^2 5^2 =$ dis	$3^1 5^2 =$ gis	$3^0 5^2 =$ cis
$3^3 5^1 =$ fis	$3^2 5^1 =$ h	$3^1 5^1 =$ e	$3^0 5^1 =$ a
$3^3 5^0 =$ d	$3^2 5^0 =$ g	$3^1 5^0 =$ c	$3^0 5^0 =$ f

Durch passende Multiplikation mit Zweierpotenzen 2^n (Oktavierung) werden die Teiler in eine lineare Ordnung gebracht. Durch Quotientenbildung erhält man aus der Eulerschen Zuordnung die diatonische Stimmung:

c	d	e	f	g	a	h	c'
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

z.B.: h : c $\quad (2^4 3^2 5^1)/(2^7 3^1) = 15/8$

D.h. alle Töne der diatonischen Tonleiter können unter den allgemeinen Term $2^n 3^3 5^2$ gebracht werden, denn alle seine Teiler innerhalb des Verhältnisses 1:2 ergeben die Töne dieser Art und erfüllen das Intervall einer Oktave.

Ein weiterer zahlentheoretischer Ansatz von Euler bestand darin, den Wohlklang bzw. die Annehmlichkeit eines Intervalls zu quantifizieren. Dies führte ihn auf die Definition einer zahlentheoretischen Funktion, der sog. Gradusfunktion (*Gradus suavitatis*), welches ein Maß für den konsonanten oder harmonikalen Gehalt der Keplerquotienten ist. Die Gradusfunktion ist so definiert, daß ihr Wert G (*Gradus*) umso kleiner ist je größer der Gehalt an Harmonie ist:

Primfaktorenzerlegung für $n \in N: \ n = \prod p_i^{a_i}$

$$G = 1 + \sum a_i p_i - \sum a_i \qquad p_i \text{... prim}$$

Die Gradusfunktion ordnet jeder natürlichen Zahl n einen bestimmten Wert G zu. Z.B. ergibt sich für n=20 der Wert G=7:

$$20 = 2^2 5^1 1^1 \quad \Rightarrow \quad G = 1 + (2{\cdot}2 + 1{\cdot}5 + 1{\cdot}1) - (2 + 1 + 1) = 7$$

Nachstehend sind noch einige Graduswerte für verschiedene n tabelliert:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	12	15	20
G(n)	1	2	3	3	5	4	7	4	5	7	7

Um nun den Grad der Annehmlichkeit von Intervallen zu bestimmen, erweiterte Euler seine Definition der Gradusfunktion auf Proportionen natürlicher Zahlen wie folgt:

G(a:b) = G { k.g.V.(a,b) / g.g.T.(a,b) }

k.g.v = kleinstes gemeinsames Vielfaches
g.g.T. = größter gemeinsamer Teiler

Auf diese Weise wird jedem Intervall ein bestimmter Wert zugeordnet und der Wohlklang eines Intervalls ist damit quantifiziert. Z.B. ergibt sich für die Quinte der niedrige Wert G = 4 aufgrund des großen Wohlklanges dieses Intervalls im Vergleich zur dem sehr hohen Wert G = 114 für die Kl. Sekunde:

Quinte (2:3): G(2:3) = G(6/1) = G(6) = 4
Kl.Sekunde (15:16): G(240) = $G(2^4 3^1 5^1 1^1)$ = 1+(8·3·5·1)-7 = 114

Ordnet man die Intervalle entsprechend ihrem Graduswert, dann ergibt sich folgende Rangordnung für nachstehende Intervalle:

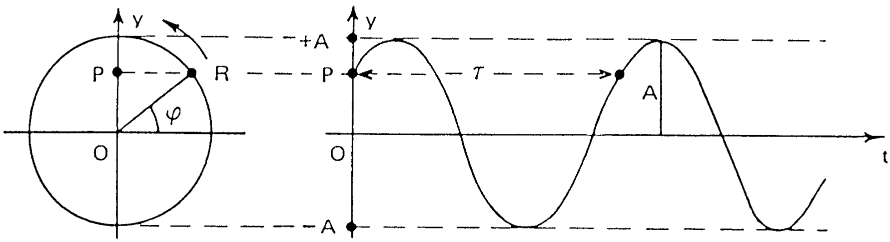
G (Prime)	=	G(1:1) = 1
G (Oktave)	=	G(1:2) = 2
G (Quinte)	=	G(2:3) = 4
G (Quarte)	=	G(3:4) = 5
G (Gr.Terz)	=	G(4:5) = 7
G (Gr.Sexte)	=	G(3:5) = 7
G (Kl.Terz)	=	G(5:6) = 8
G (Sexte)	=	G(5:8) = 8

Vergleicht man diese Eulersche Rangordnung des Wohlklanges von Intervallen mit der Rangordnung der Keplerquotienten, wie sie Kepler aufgrund der "Wißbarkeit" von regulären Vielecken aufgestellt hatte, so stimmen diese miteinander überein, wie aus der letzten Spalte (Eulersche Gradusfunktion der Keplerquotienten) der dort abgebildeten Tabelle hervorgeht.

Für die Gradusfunktion gelten noch folgende Beziehungen: $G(p) = p$, wobei p eine Primzahl ist. Und $G(n \cdot m) = G(n) + G(m) - 1$. Wenn $m=2$ ist, ergibt die letzte Gleichung: $G(n \cdot 2) = G(n)+1$. Multiplikation mit 2 entspricht einer Oktavverschiebung. Und in der Tat besitzt z.B. das Intervall *f* - *c*' einen um eine Einheit kleineren Wohlklang als das Intervall *f* - *c*", was auch der Hörerfahrung entspricht.[25]

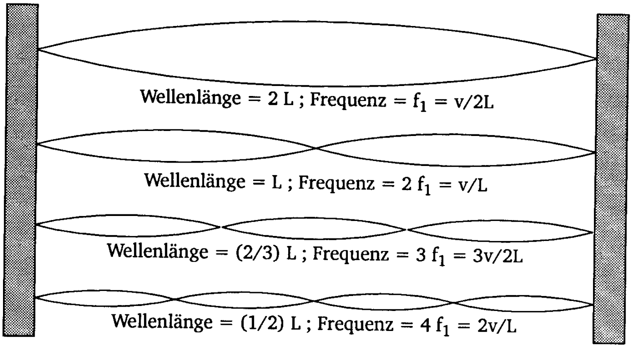
6. Ton, Klang und Schwebung

Die vollkommenste geometrische Figur der Ebene ist der Kreis. Die einfachste Bewegung eines Punktes entlang der Kreislinie ist eine gleichförmige, d.h. eine Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Projiziert man die Bewegung eines solchen Punktes auf einen Durchmesser des Kreises, so erhält man eine sog. harmonische Schwingung, welche mathematisch eine einfache Sinuskurve ergibt, wenn man die Elongation y gegenüber der Zeit t aufträgt. Dies ist der bekannte Zusammenhang zwischen gleichförmiger Kreisbewegung und Sinusfunktion: $y=\sin(t)$.



Akustisch betrachtet entspricht eine harmonische Schwingung einem reinen Ton (Sinuston). Aber 1636 entdeckte Marin Mersenne, daß ein "musikalischer Ton" neben dem Grundton noch weitere sog. Obertöne besitzt. Die wirklichen "Töne" in der Musik, unsere Sprache und die meisten Laute in der Natur sind Klänge, welche aus einem Grundton und mehreren Obertönen bestehen. Man bezeichnet den Grundton auch als ersten Partialton (Teilton) oder als 1.Harmonische und dementsprechend die nachfolgenden Obertöne als zweiten, dritten usw. Partialton bzw. Harmonische.

25. Radbruch, K.: Mathematik in den Geisteswissenschaften. Göttingen 1989



Eine zwischen zwei Enden eingespannte Saite schwingt daher nicht nur mit der Grundfrequenz, sondern im Prinzip sind sämtliche höheren Ordnungen stehender Wellen möglich, also höhere Harmonische. Die Anzahl der Schwingungsbäuche ist zugleich die Ordnung der Harmonischen. Ein Schwingungsbauch entspricht dem Grundton, zwei dem ersten Oberton (2.Harmonische), drei dem zweiten Oberton (3.Harmonische) usw. Man kann mathematisch zeigen, daß stehende Wellen die einzig mögliche Schwingungsform für eine Saite mit befestigten Enden sind, welche die Rolle von Schwingungsknoten spielen. D.h. es sind nur solche Wellen "gestattet", die zwischen die beiden Enden "hineinpassen", bei welchen also die Länge L der Saite einem ganzzahligen Vielfachen des Abstandes l_n zweier ihrer Knoten entspricht:

$$L = nl_n = n\lambda/2 \tag{1}$$

wobei λ die Wellenlänge der stehenden Welle bedeutet und n eine beliebige natürliche Zahl darstellt.

Zupft man eine Saite, dann breitet sich diese Störung (Auslenkung aus der Ruhelage) mit einer bestimmten Geschwindigkeit v aus, welche von der Spannung T der Saite und der Masse pro Längeneinheit ("lineare Dichte") d gemäß

$$v = \sqrt{\frac{T}{d}} \tag{2}$$

abhängt. Je gespannter eine Saite ist, desto rascher pflanzt sich die Störung (Querwelle) fort. Setzt man in diese Gleichung die bekannte Beziehung

$$v = \lambda f \tag{3}$$

zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit v einer sinusförmigen Welle, ihrer Wellenlänge λ und der Frequenz f der Schwingung der einzelnen Punkte der Saite ein, dann ergibt sich für die Wellenlänge einer Querwelle in einer Saite

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{T}{d}}}{f} \tag{4}$$

Zu einer stehenden Welle kommt es, da die sich ausbreitende Welle an den Saitenenden reflektiert wird und sich mit der ankommenden Welle überlagert. Die verblüffende Konsequenz ist, daß sich die resultierende Welle überhaupt nicht fortpflanzt, sondern an bestimmten Punkten, eben den Knoten, in Ruhe bleibt und in einer Entfernung von $\lambda/4$ maximal schwingt (Bauch). Im Gegensatz zu einer Welle, die sich fortpflanzt, schwingen in einer stehenden Welle die Punkte entweder in Phase oder um 180° phasenverschoben. Eine stehende Welle gleicht in gewisser Weise einer elastisch schwingenden Feder, bei der sich auch keine Energie fortpflanzt. Wie in jenem Fall gehen auch bei der stehenden Welle zu einem bestimmten Zeitpunkt alle Punkte durch die Gleichgewichtslage - die Energie der ganzen Saite ist kinetisch - und zu einem anderen Zeitpunkt befinden sich alle Punkte bei maximaler Auslenkung - alle Energie ist nun potentiell.

In einer stehenden Welle sind nur Schwingungen möglich, die ein ganzzahliges Vielfache der halben Wellenlänge ausmachen, also

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1,2,3, \ldots \tag{5}$$

Dies ist gleichbedeutend, daß eine Saite nur mit folgenden Frequenzen schwingen kann:

$$f_n = \frac{\sqrt{\frac{T}{d}}}{\lambda_n} = \frac{n\sqrt{\frac{T}{d}}}{2L} = nf_1 \tag{6}$$

Die kleinst mögliche Frequenz erhält man für n=1, das entspricht der Grundfrequenz der Saite, dem Grundton. Man ersieht aus dieser Formel sofort, daß der erste Oberton f_2 (2.Harmonische) die obere Oktave von f_1 ist:

$$f_2 = 2f_1 = \frac{\sqrt{\frac{T}{d}}}{L} \tag{7}$$

Der zweite Oberton f_3 (3.Harmonische) liegt eine Duodezime über f_1 bzw. eine Quinte über der Oktave f_2:

$$f_3 = 3f_1 = \frac{3}{2}f_2 = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\frac{T}{d}}}{L} \tag{8}$$

Entsprechend bildet der dritte Oberton f_4 (4.Harmonische) die Doppeloktave zu f_1 usw.

Aus Gleichung (6) geht hervor, daß die Frequenz einer schwingenden Saite zur Quadratwurzel der Spannung proportional und zu ihrer Länge und der Quadratwurzel ihrer Masse pro Längeneinheit umgekehrt proportional ist. Wir betonen dies, weil im Zusammenhang mit Pythagoras mehrfach überliefert wird, daß er in einer Schmiede aus dem Klang von vier Hammern die Intervalle Oktave, Quinte und Quarte herausgehört habe und als er deren Gewicht bestimmte das Verhältnis 12:9:8:6 vorgefunden habe. Daraufhin habe Pythagoras vier gleiche Saiten aufgehängt und mit Gewichten in diesem Verhältnis belastet. Als er die entsprechenden Saitenpaare durch Zupfen zum Erklingen brachte, sollen sie, so wird berichtet, wie Oktave, Quinte und Quarte geklungen haben. So kann es sich aber sicher nicht zugetragen haben, denn die Saiten hätten durch Gewichte im Verhältnis $12^2 : 9^2 : 8^2 : 6^2$ gespannt werden müssen, um Oktave, Quinte und Quarte zu erzeugen.

Wenn in einem Naturvorgang nur Frequenzen auftreten, welche ganzzahlige Vielfache einer bestimmten Grundfrequenz sind, nennt man das "Quantisierung". Die Quantisierung spielt in der Physik eine große Rolle, insbesondere steht sie am Beginn der Quantentheorie der Materie und sie ist von grundlegender Bedeutung für die sog. "Quantenfeldtheorien" (Zweite Quantisierung). Die möglichen Schwingungsformen (Moden) eines physikalischen Systems nennt man seine Schwingungsordnungen oder Eigenschwingungen. Die Grundfrequenz, die Oktave, die Duodezime usw. stellen entsprechend die ersten, zweiten, dritten usw. Schwingungsordnungen einer gespannten Saite dar, deren Frequenzen durch die Gleichung (6) gegeben sind. Da die Wellen die Fähigkeit besitzen sich linear zu überlagern (Superpositionsprinzip), können viele verschiedene Ordnungen gleichzeitig in einem System (hier Saite) auftreten, ohne sich gegenseitig zu stören oder zu beeinflussen. Die Gleichung (6) gilt streng genommen nur näherungsweise, insbesondere für höhere Schwingungsordnungen. Der Grund hierfür ist, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Querwelle in Wirklichkeit leicht von der Frequenz abhängt (dies nennt man Dispersion). Genaugenommen ist die Wellengeschwindigkeit v ein wenig größer als der oben angegebene Wert ($v = \sqrt{T/d}$). Die Abweichung davon wird umso größer, je stärker die Saite verformt wird, d.h. je höher die Frequenzen und je größer die Amplituden sind. Die Konsequenz ist, daß die Frequenzen höherer Schwingungsordnungen keine ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz sind und sie deshalb zueinander in keinem harmonischen Verhältnis mehr stehen, weshalb man diese Ordnungen auch als anharmonisch bezeichnet. Beispiele für anharmonische Schwingungsordnungen sind schwingende Festkörper wie Xylophonstäbe und Glocken. Wenn die Frequenzen aber nicht zu hoch sind, dann fallen die Obertöne einer schwingenden Saite mit den Harmonischen zusammen und Gleichung (6) stimmt exakt.[26]

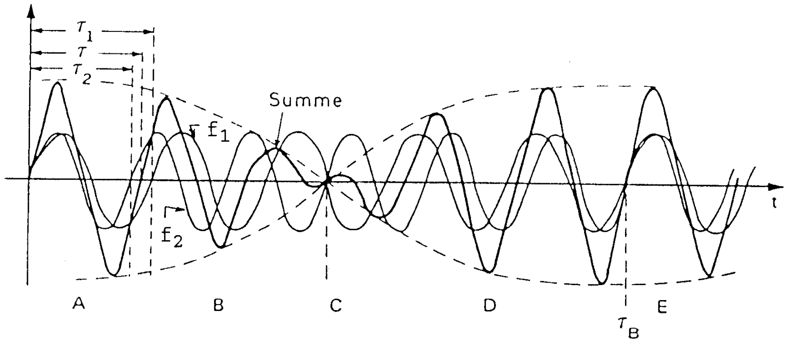
Wenn sich zwei reine Sinustöne gleicher Amplitude, aber geringfügig verschiedener Frequenzen f_1 und $f_2 = f_1 + \Delta f$ überlagern, dann ergibt das eine Schwingung mit einer Frequenz f_r zwischen f_1 und f_2, deren Amplitude langsam schwankt, was akustisch als pulsierender oder auf und ab "schwebender" Ton empfunden wird. Die Frequenz des resultierenden Schwingungsmusters ist gleich dem Durchschnittswert:

$$f_r = \frac{f_1 + f_2}{2} = f_1 + \frac{\Delta f}{2}$$

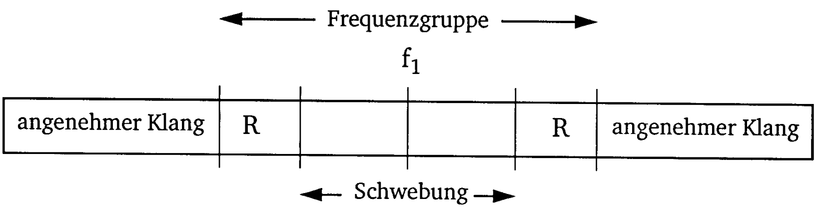
Das Zeitintervall τ_B, nach dem die resultierende Amplitude wieder ihren Anfangswert erreicht hat, nennt man Schwebungsperiode. Und die Anzahl der Amplitudenänderungen pro Sekunde, die Schwebungsfrequenz $f_B = 1/\tau_B$, ergibt sich durch die Differenz der Teiltöne:

$$f_B = |f_2 - f_1| = |\Delta f|$$

26. Roeder, J.G.: Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik. Berlin/Heidelberg/New York 1977



Je geringer der Frequenzunterschied, desto “langsamer” ist die Schwebung. Wenn $f_1=f_2$ ($\Delta f=0$) wird, dann verschwindet die Schwebung völlig und beide Teiltöne klingen unisono (1:1); man hört einen gleichmäßigen Ton mit konstanter Lautstärke, welcher aber von der jeweiligen Phasendifferenz zwischen den beiden Teiltönen abhängt. Solange die Frequenzdifferenz Δf unter 10 Hz liegt, nimmt man die Schwebung deutlich wahr. Erst wenn die Frequenzdifferenz ca 15 Hz überschreitet, verschwindet allmählich die Empfindung der Schwebung und an ihre Stelle tritt eine eigenartige Rauhigkeit oder “Unschönheit” der Empfindung. Vergrößert man weiterhin die Frequenzdifferenz, dann nimmt auch diese Rauhigkeit wieder ab und beide Töne klingen “glatt” und “angenehm”. Diesen Übergangsbereich von Schwebung über Rauhigkeit R zu Glattheit bezeichnet man als “Frequenzgruppe” bzw. “kritische Bandbreite”. Dieser Übergang erfolgt keineswegs abrupt, sondern vollzieht sich schleichend.



7. Helmholtz' Vorstellung von Harmonie und Konsonanz

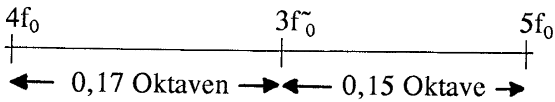
Kommen wir nun zurück auf die Grundfrage nach der Harmonie der Töne. Die Pythagoreer wußten zwar, daß konsonierende Töne mit einfachen Zahlenverhältnissen zu tun haben, aber sie suchten den Grund der Harmonie in dem geheimen wunderbaren Wesen der Zahl. Interessanterweise gab bereits Euklid um 300 v. Chr. eine erstaunlich modern anmutende Definition für die Konsonanz und Dissonanz von Tönen, wenn er sagt, daß *die Konsonanz zweier Töne die Mischung derselben, die Dissonanz dagegen die Unfähigkeit sich zu mischen sei, weshalb sie für das Gehör rauh werden.* Obgleich er die wahren Ursachen der Harmonie nicht kannte, war er ihr unbewußt doch recht nahe gekommen. Fast zweitausend Jahre später suchte Leibniz (1646-1716) die Erklärung der Harmonie von Tönen im geheimen Zählen und Vergleichen der einfachen Schwingungszahlen und in der geheimen Freude der Seele an dieser Beschäftigung. Unser Harmonieempfinden basiert nach Leibniz auf einer *verborgenen mathematischen Übung unserer Seele,* die beim Musik hören unbewußt Mathematik betreibt. Auch er hatte mit diesem Gedanken so unrecht nicht, wenn auch nicht ganz klar ist, was er unter "geheimen Zählen" verstanden wissen wollte. Euler wiederum suchte, wie wir sahen, die Quelle der Harmonie in der zahlentheoretischen Ordnung der Schwingungszahlen.

Es war Helmholtz (1821-1894), der im vorigen Jahrhundert als Erster klar erkannte, daß für das harmonische Zusammenklingen von Tönen der Anteil auftretender Schwebungen essentiell ist.[27] Die Schwebungen sind nach Helmholtz *die einzige Sünde, das einzig Böse* in der harmonischen Musik. Die Konsonanz ist der Zusammenklang ohne merkliche Schwebungen. Nach dieser Definition von Konsonanz ist der Einklang, unisono (1:1), die vollkommenste Konsonanz. Das ist sofort klar, wenn man sich vor Augen hält, daß in diesem Fall beide Klänge identisch sind und daher nicht nur der Grundton, sondern auch alle Obertöne zusammenfallen. Aber nicht nur beim Einklang treten keine Schwebungen auf, auch bei der Oktave fällt jeder zweite Partialton des tieferen Klanges mit den Partialtönen des höheren Klanges zusammen, weshalb auch hier keine störenden Schwebungen auftreten können. Die Oktave ist daher - sieht man von dem trivialen Fall der Prime ab - die höchste Harmonie zweier unterschiedlicher Klänge. Diese Eigenschaft

27. Helmholtz, H. v.: Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. Hildesheim 1968

stellt die Oktave als musikalisches Intervall einmal mehr in ein ganz besonderes Licht.

Die Situation ändert sich, wenn die beiden komplexen Töne (Klänge) im Verhältnis einer Quinte zueinander stehen. In diesem Fall fallen zwar die geraden Partialtöne des höheren Klanges mit jenen des tieferen zusammen, aber die ungeraden Partialtöne des höheren Klanges liegen zwischen den Partialtönen des tieferen Klanges. Nur die geraden Harmonischen beider Klänge fallen also zusammen, während z.B. der dritte Partialton des höheren Klanges bereits "gefährlich nahe" bei den Frequenzen der vierten und fünften Harmonischen des tieferen Klanges zu liegen kommt. Wie sich leicht ausrechnen läßt beträgt der Abstand zur 4.Harmonischen nur 0,17 Oktaven und zur 5.Harmonischen 0,15 Oktaven.

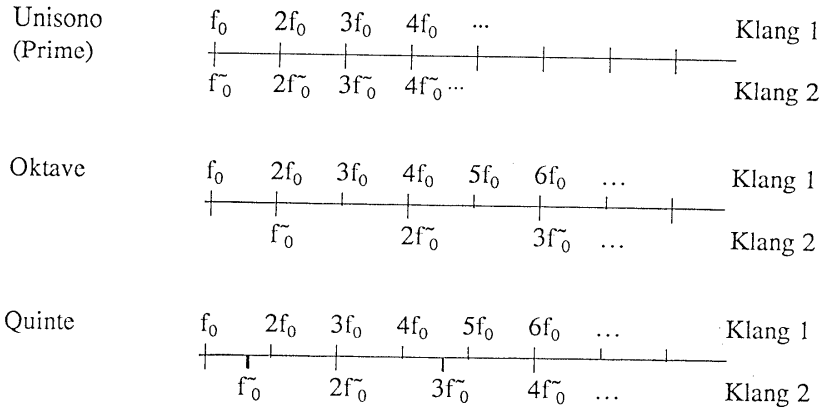


Da die kritische Bandbreite aber zwischen Ganzton = 0,17 Oktaven und Kl.Terz = 0,25 Oktaven liegt, bedeutet dies, daß bereits die 3.Harmonische des höheren Klanges in diesem Bereich liegt und daher zu Schwebungen Anlaß gibt. Da der Anteil an sog. "kollidierenden Harmonischen" bei den anderen Intervallen wie Quarte, Terz, Sexte usw, rapide zunimmt, nehmen die störenden Schwebungen im gleichen Maß zu, was entsprechend der Helmholtzschen Konsonanzdefinition den Harmoniegehalt zweier Klänge vermindert. Anders ausgedrückt heißt das, daß der Konsonanzgrad zweier komplexer Töne umso größer ist, je höher die Anzahl an übereinstimmenden Harmonischen ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn die Grundfrequenz der beiden Klänge f_0 und $f_0^{\sim}$ in einem ganzzahligen Verhältnis p/q stehen, wobei q und p möglichst klein sein sollen:

$$f_0/f_0^{\sim} = p/q \qquad (p,q = 1,2,3, \dots)$$

Denn dann ist auch die Frequenz der q-ten Harmonischen von f_0 gleich der p-ten Harmonischen von $f_0^{\sim}$ und ebenso die Frequenz der 2q-ten Harmonischen von f_0 gleich der Frequenz der 2p-ten Harmonischen von $f_0^{\sim}$ usw. Es gilt also:

$$\begin{aligned} qf_0 &= pf_0^{\sim} \\ 2qf_0 &= 2pf_0^{\sim} \\ 3qf_0 &= 3pf_0^{\sim} \qquad \dots \end{aligned}$$



Alle übrigen Harmonischen stimmen nicht überein und können daher Schwebungen hervorrufen. Nachstehende Tabelle zeigt die Intervalle innerhalb einer Oktave, die mit kleinen p,q gebildet werden können, geordnet nach dem Grad der Konsonanz aufgrund des prozentuellen Anteils gemeinsamer Harmonischen.

Intervalle	Prime	Oktave	Quinte	Quarte	Gr.Terz	Gr.Sext	Kl.Terz
gemeinsame Harmonische in Prozent	100	50	33,3	25	20	20	16,6

Auch diese Reihenfolge musikalischer Intervalle nach ihrem Konsonanzgrad stimmt mit der Keplerschen und Eulerschen Rangordnung zusammen. Allerdings mit dem Unterschied, daß der Grund der Harmonie musikalischer Töne nicht mehr allein in der Mathematik gesucht wird, wie die geometrische Interpretation bei Kepler oder die zahlentheoretische bei Euler, sondern bei Helmholtz hängt Harmonie und Konsonanz mit dem physikalischen Phänomen der Schwebungen zusammen.

8. Stabilitätsprobleme im Planetensystem

Die meisten konservativen Systeme (potentielle und kinetische Energie bleiben erhalten) in der Physik sind nichtintegrabel, sondern stellen chaotische Systeme im Sinne des deterministischen Chaos dar. Das historisch wichtigste Beispiel eines konservativen chaotischen Systems ist sicherlich das Dreikörperproblem der Himmelsmechanik. Während das Zweikörperproplem, etwa Sonne-Planet, oder Planet-Mond, mathematisch exakt lösbar sind und die Keplerschen Gesetze exakt gelten, trifft dies für drei und erst recht für mehrere Körper nicht zu. Zwei Körper bewegen sich auf Ellipsen um den gemeinsamen Schwerpunkt, der in der Nähe zum schwereren Zentralkörper liegt. In unserem Sonnensystem aber verursachen die anderen Planeten und Monde eine signifikante Abweichung von der elliptischen Umlaufbahn eines Planeten, und es stellt sich daher die berechtigte Frage, inwieweit derartige Störungen die Stabilität des Sonnensystems beeinträchtigen können. In der Tat war dies die Preisfrage der Schwedischen Akademie der Wissenschaften im vorigen Jahrhundert. Seit Newton (1643-1727) das Zweikörperproblem gelöst hatte, beschäftigten sich die hervorragendsten Mathematiker aller Zeiten mit dieser Frage, doch immer wieder entzog sich das Problem dem Zugriff, obschon um 1800 Laplace, Lagrange und Poisson glaubten das Problem gelöst zu haben. Doch auch deren "Beweise" hatten Mängel und nachdem kurz vor seinem Tod der Mathematiker Dirichlet behauptete, einen Beweis für die Stabilität gefunden zu haben, ohne allerdings Unterlagen hinterlassen zu haben, entschloß sich der schwedische König Oskar, die Stabilität unseres Sonnensystems zur Diskussion zu stellen, und leitete damit einen Wendepunkt in der Theorie dynamischer Systeme ein. An der Beantwortung dieser Frage beteiligte sich auch Henri Poincaré (1854-1912), welcher zu dem Ergebnis kam, daß die Stabilität unseres Sonnensystems nicht garantiert sei, obgleich die mechanische Instabilität mit ziemlicher Sicherheit nicht eintritt, bevor die Sonne ihren Brennstoff verbraucht hat, was immerhin noch einige Millionen Jahren dauert, sodaß keine Gefahr besteht, den morgigen Sonnenaufgang nicht mehr erleben zu können. Doch diese Sicherheit zählt vom strengen mathematischen Standpunkt nicht, bei dem es ja um eine prinzipielle Beantwortung der Frage geht.

Poincaré, der 1890 seine im Original 270 Seiten lange Arbeit veröffentlichte, entwickelte dabei eine neue Art dynamische Systeme zu behandeln. Um z.B. die Frage zu beantworten, ob eine Bewegung periodisch ist, ist es nicht nötig, diese in ihrem gesamten Verlauf zu verfolgen, sondern es genügt, eine Schnittfläche, den sog. Poincaré-Schnitt, mit dieser Kurve zu betrachten. Wenn die Bewegung periodisch ist, dann muß die Kurve den Poincaré-Schnitt genau in ihrem Ausgangspunkt treffen. Die Bewegung von zwei Körpern um den gemeinsamen Schwerpunkt ist eine geschlossene Kurve, nämlich eine Keplerellipse, und daher periodisch. Dies gilt natürlich nicht nur für die Bewegung eines Körpers im normalen dreidimensionalen Raum, sondern sobald sich ein Punkt im Phasenraum auf einer geschlossenen Kurve bewegt, dann entspricht das einer periodischen Bewegung. Poincaré betrachtete ein idealisiertes Dreikörperproblem, das sog. Hillsche restringierte Modell. Dabei geht man von drei Körpern aus, von denen jedoch einer eine so kleine Masse besitzt, daß er die beiden anderen nicht beeinflußt, aber umgekehrt sehr wohl von den anderen beeinflußt wird. Ein Staubkorn und zwei Planeten von der Größe der Erde wären ein Beispiel für dieses Modell. Poincaré wandte seine Schnittflächenmethode auf das Hillsche restringierte Modell an, um die periodischen Bewegungen des Staubpartikels aufzufinden. Was er fand, veranlaßte ihn zu der resignierenden Bemerkung: *Diese Dinge sind so bizarr, daß ich es nicht aushalte, weiter darüber nachzudenken.*[28] Poincaré hatte die Spuren des deterministisches Chaos entdeckt und was er mit seiner Schnittflächenmethode entdeckte, heißt heute "homoklines Gewirr" im Dreikörperproblem.

Erst Anfang der sechziger Jahre wurde Poincarés Stabilitätsproblem wieder aufgegriffen, und zwar unabhängig voneinander von Jürgen Moser aus Göttingen und Vladimir Arnold aus Moskau. Aufbauend auf Arbeiten des Amerikaners Georg Birkhoff, des Deutschen Carl Ludwig Siegel und des Russen Andrei Kolmogoroff, bewiesen sie den heute als KAM-Theorem (Kolmogoroff-Arnold-Moser) bekannten Lehrsatz, der vereinfachend ausgedrückt besagt, daß für Dreikörpersysteme (bzw. Zweikörpersysteme mit äußerer Kraft) die Stabilität gegeben ist, vorausgesetzt der dritte Körper (bzw. die äußere Kraft) beeinflußt das Zweikörperproblem nur sehr gering. So wie man am normalen Stabpendel auf der Erde das Zweikörperproblem studieren kann, läßt sich der Kern des KAM-Theorems auch mit Hilfe des sog. Doppelpendels, als Beispiel eines Dreikörperproblems, illustrieren. Das ist ein Pendel, an dem ein zweites beweglich montiert ist. Sie sind zwar miteinander verkoppelt, aber beide Pendel schwingen bzw. rotieren unabhängig voneinander. Dieses scheinbar einfache System weist eine äußerst komplexe Dynamik auf, bei welchem regelmäßiges und chaotisches Verhalten eng miteinander verwoben sind. Dieses Verhalten läßt sich am besten mit der Poincaré-

28. PoincarÁ, H.: zit aus Stewart, I.: Spielt Gott Roulette? Basel/Bosten/Berlin 1990

schen Methode beschreiben, indem man die Bewegung nur in ganz bestimmten Augenblicken registriert, etwa dann, wenn die beiden Pendel gestreckt sind. Jedesmal wenn dies eintritt, trägt man den entsprechenden Winkel φ und Drehimpuls J des ersten Pendels in einem (φ,J)-Phasendiagramm auf. Periodische Bahnen ergeben in dieser Darstellung einzelne Punkte, die in bestimmter Reihenfolge durchlaufen werden und in regelmäßigen Abständen zum Ausgangspunkt zurückkehren. Die periodische Bewegung entspricht einem rationalen Windungsverhältnis, d.h. das Verhältnis der Zahl der Umdrehungen des einen Pendels im Vergleich zum anderen ist eine rationale Zahl. Ist dagegen das Windungsverhältnis eine irrationale Zahl, dann wird die anfängliche Position nie wieder ganz genau erreicht, aber doch in festen Zeitabständen näherungsweise, und die entsprechende Poincaré-Abbildung ergibt eine geschlossene Linie, die als Ganzes invariant ist. Wie die periodische Bewegung stellt auch die quasiperiodische Bewegung immer noch eine ziemlich regelmäßige Situation dar. Ganz anders ist dagegen die chaotische Bewegung, die in völlig unregelmäßigen Abständen in die Nähe des Ausgangspunktes zurückkehrt und dazwischen einen mehr oder wenig großen Bereich der Energiefläche auskundschaftet. Die Energiefläche ist jener dreidimensionale Teilbereich des ansonst vierdimensionalen Phasenraums, da die Bewegung des Doppelpendels frei von Reibung sein soll und daher die mechanische Energie erhalten bleibt. Die Bewegung auf dieser Energiefläche kann noch weiter eingeschränkt sein. Grundsätzlich gibt es vier Bewegungsarten: Ersten die stabile Ruhelage, wenn beide Pendel senkrecht herunterhängen und die restlichen drei instabilen Situationen, wo mindestens ein Pendel hochgeklappt ist. Ob das Doppelpendelsystem stabil ist oder nicht, hängt ganz von den Anfangsbedingungen ab, und ob eine Bewegung stabil ist, erkennt man daran, wie es auf kleine Störungen reagiert. Durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen kann man periodische Bahnen beliebig hoher Periode hervorrufen und bei chaotischen Bewegungen reagiert das System extrem empfindlich auf die geringste Störung, sodaß selbst sehr eng benachbarte Anfangssituationen nach einiger Zeit zu völlig getrennten Bahnen führen.

Betrachtet man das System bei verschieden großen Energien, dann herrscht bei niedrigen Energien periodisches bzw. quasiperiodisches Verhalten vor, während bei mittleren Energien der chaotische Charakter dominiert. Im Poincaré-Schnitt erkennt man diesem Übergang vom relativ regelmäßigem zum chaotischen Bewegungsverlauf daran, daß allmählich immer mehr invariante Kurven aufbrechen, d.h. es existieren immer weniger "Inseln" mit ihren periodischen Zentren. Im Poincaré-Schnitt erscheinen immer mehr einzelne Punkte, die den Chaosbereich ausfüllen, selbst wenn man nur eine einzige Bahn verfolgt. Daß ein solches irreguläres Verhalten zu erwarten ist, hat Poincaré erkannt und er sah darin einen Hinweis für die prinzipielle Instabilität schon relativ einfacher mechanischer Systeme, wie z.B. des Dreikörperproblems und erst recht für Vielkörperprobleme, wie unser Planetensystem.

Poincaré hatte jedoch noch nicht erkannt, daß bestimmte invariante Kurven existieren können, die einzelne Chaosbereiche gegeneinander abgrenzen, welche immer mehr eingeschränkt werden, je mehr solcher invarianter Kurven existieren. Diese Kurven stellen gleichsam die stabilisierenden Elemente inmitten der chaotischen Dynamik dar und erst wenn die letzte invariante Kurve zerfällt, kann sich eine einzelne Bahn auf die ganze Energiefläche ausbreiten, was gleichbedeutend ist mit einem globalen chaotischen Verhalten. *Und diese letzte Kurve hat - auf beinahe geheimnisvolle Weise - mit dem Goldenen Schnitt zu tun. ... Wie sollte man da nicht an eine Harmonie an der Grenze von Ordnung und Chaos glauben*, schreibt Richter.[29] Denn, wie wir schon früher erwähnt haben, ist der Goldene Schnitt die irrationalste aller Zahlen und wie wir noch sehen werden, sind jene Bahnen, die diesem Verhältnis am nächsten kommen am wenigsten störanfällig, d.h. sie halten dem Einbruch des Chaos am längsten stand, was Richter mit den folgenden Worten ausdrückt: *Der Goldene Schnitt charakterisiert in subtiler Weise die letzte Bastion von Ordnung und Chaos.*[30]

Da in unserem Sonnensystem der Einfluß von dritten Körpern nur gering ist, darf erwartet werden, daß die chaotischen Bereiche weitgehend durch die stabilisierenden quasiperiodischen Bewegungen in Schach gehalten werden, aber ganz sicher können wir nicht sein, denn es könnte Schlupflöcher für das Chaos geben, eine Möglichkeit, worauf Arnold hingewiesen hat. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß sich bei großen Energien wieder mehr regelmäßiges Verhalten einzustellen beginnt, da nun die Drehimpulse der Pendel so groß geworden sind, daß der dritte Körper, nämlich die Erde mit ihrer Gravitation, eine immer geringere Rolle spielt und das System sich mehr und mehr einem Zweikörperproblem nähert.

Kehren wir vom Doppelpendel zurück zum Sonnensystem und fra-

29. Peitgen, H.-O./ Richter, P.H.: Harmonie in Chaos und Kosmos. Broschüre der Städtischen Sparkasse in Bremen 1984. S 22
30. Peitgen, H.-O./ Richter, P.H.: a.a.O., S 5

gen uns, welche Rolle rationale und irrationale Zahlen in Hinblick auf die Stabilität des Systems spielen. Wie schon früher erwähnt, bildete die Ganzzahligkeit des Frequenzverhältnisses von Grundton und Obertönen einer Saite und die daraus hervorgehenden reinen Intervalle, wie Oktave (1:2), Quinte (2:3), Quarte (3:4), große Terz (4:5), kleine Terz (5:6), die aus aufeinanderfolgenden Obertönen gebildet werden können, die Grundlage einer zahlentheoretisch fundierten Ästhetik des harmonischen Zusammenklangs. Bei den Pythagoreern bildete Mathematik und Musik, Zahl und Ton, oder besser Proportionen und Intervalle eine geheimnisvolle Einheit. Sie erblickten darin ein überzeugendes Beispiel von Harmonie, welche in der allgemeinen These gipfelte: die ganze Welt ist vom Schöpfer nach dem Prinzip der Harmonie geschaffen. Das Prinzip der Passung bzw. Stimmung war maßgebend für die überall aufgespürte Harmonie. Und nicht zuletzt war auch die nach den reinen Intervallen gestimmte Tonleiter Grundlage der so gestimmten Planetenbahnen, der Sphärenharmonie, die dadurch die nötige Stabilität erhielt. Auch Cusanus sah in der Musik eine hervorragende Metapher für die göttliche Harmonie im Kosmos und erst recht suchte Kepler nach einem geeigneten Maßverhältnis, das die Harmonien bestimmt. Dieses Maßverhältnis (der Keplerquotient) ist durch die rationale Zahl p/q gegeben, wobei, p und q möglichst kleine ganze Zahlen sind. Und auch Euler versuchte mit zahlentheoretischen Methoden Gesetze der Musiktheorie aufzuspüren. Wir erinnern an die von ihm eingeführte Gradusfunktion, seinen “gradus suavitatis” oder Grad der Annehmlichkeit, um den konsonanten bzw. harmonikalen Gehalt eines Keplerquotienten zu messen.

In der Tat gibt es einige bemerkenswerte rationale Zahlenverhältnisse im Sonnensystem, welche das pythagoreische Konsonanzprinzip zu unterstreichen scheinen, wie nachstehende Tabelle zeigt:

Verhältnis der Umlaufzeiten zweier Planeten					Abweichung vom exakten Bruchwert (%)
Merkur	:	Erde	=	1 : 4	3.7
Merkur	:	Venus	=	2 : 5	2.1
Venus	:	Mars	=	1 : 3	2.0
Venus	:	Erde	=	5 : 8	1.6
Erde	:	Mars	=	8 :15	0.3
Jupiter	:	Saturn	=	2 : 5	0.7
Uranus	:	Neptun	=	1 : 2	1.9
Neptun	:	Pluto	=	2 : 3	0.2

Man kann aus dieser Tabelle sofort Proportionsgleichungen ableiten, die mehrere Planeten einbeziehen, wie z.B. die Beziehung zwischen den vier innersten Planeten Merkur, Venus, Erde und Mars:

Merkur : Venus : Erde : Mars = 2 : 5 : 8 : 15,

oder die sehr interessante Beziehung zwischen den drei äußersten Planeten Uranus, Neptun und Pluto:

Uranus : Neptun : Pluto = 1 : 2 : 3,

oder das Verhältnis zwischen Venus und Merkur einerseits und Jupiter und Saturn andererseits:

Venus : Merkur = Saturn : Jupiter,

wobei diese Gleichung nur 8 Promille vom exakten Wert abweicht.

Analog zu den Planeten lassen sich auch Proportionsgleichungen für gewisse Monde von Planeten aufstellen. Z.B. gilt für die Saturnmonde Titan und Hyperion bzw. für Enceladus und Dione folgende Beziehung:

Titan : Hyperion = 3 : 4
Enceladus : Dione = 1 : 2

Und für die Jupitermonde Jo, Europa und Ganymed gilt:

Jo : Europa : Ganymed= 1 : 2 : 4

Ein anderes Beispiel sind die beiden Trojanergruppen, die zu den Asteroiden (Planetoiden) gehören und zusammen mit Sonne und Jupiter je ein gleichseitiges Dreieck bilden. Ihre Umlaufzeit ist genau dieselbe wie die des Jupiters, sie laufen mit diesem synchron um die Sonne: ein Beispiel exakter Symmetrie und reiner Konsonanz. Interessanterweise hat bereits Lagrange lange vor der Entdeckung der Trojaner eine mögliche Bewegung von drei Himmelskörpern vorausgesagt, die stets ein gleichseitiges Dreieck bilden. Und erst 1967 bewies das Ehepaar Deprit, daß diese Bewegung auch über lange Zeit stabil sein kann.

9. KAM-Theorem und der Goldene Schnitt

Andererseits scheint gerade die Massenverteilung des Asteroidengürtels, der aus einer Vielzahl von Kleinplaneten besteht, die sich zwischen den Bahnen des Mars und Jupiter bewegen, ein Beispiel dafür zu sein, daß es gerade nicht die rationalen Zahlen sind, die für die kosmische Stabilität verantwortlich sind. Die ca 3500 bekannten Planetoiden, deren größter Ceres mit einem Durchmesser von 1023 km ist, während 90% unter 60 km groß sind, sind nicht gleichmäßig verteilt. 1857 entdeckte Daniel Kirkwood sog. "Kommensurabilitätslücken": Sonnenabstände, in denen sich im Asteroidengürtel nur wenige bzw. gar keine Planeten befinden. Er erklärte sie aufgrund der Störungen von Jupiter. Sie finden sich vorwiegend dort, wo aus dem Sonnenabstand in Verbindung mit Keplers drittem Gesetz eine Umlaufzeit resultiert, welche mit der des Jupiters in einem einfachen Zahlenverhältnis steht, etwa 1:2, 1:3, 2:5, d.h. wo sich musikalisch gesehen (besser: gehört) ein wohlklingender kosmischer Akkord ergibt.

Man kann sich solche Lücken infolge Instabilitäten durch Resonanz erklären und zwar derart, daß sich die vom Jupiter verursachten Störungen an der Bahn des Asteroiden aufschaukeln, wenn die Umlaufzeiten T in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \, ,$$

wobei p und q natürliche Zahlen sind. Z.B. wird sich für $T_1/T_2 = 1/2$ nach jedem 2.Umlauf eines Planetoiden die Störung durch Jupiter richtungsgleich wiederholen, so daß dieser schließlich aus seiner Bahn geworfen wird. Stabilität ist daher gerade mit Resonanzfreiheit und folglich mit irrationalen Frequenzverhältnissen gekoppelt, während die reine pythagoreische Spärenharmonie konsonanter Frequenzverhältnisse geradezu zur resonanten Katastrophe führt, da sich der Einfluß von Störungen im Resonanzfall im Laufe der Zeit nicht herausmittelt, sondern im Gegenteil verstärkt. Man könnte vermuten, daß die Resonanzkatastrophe umso später einsetzt, je größer der Nenner q des Periodenverhältnisses $T_1/T_2 = p/q$ ist, d.h. je weniger rational, oder musikalisch gesehen (gehört), je dissonanter der Bruch ist. Wenn sich der Bruch überhaupt nicht mehr durch eine rationale Zahl, sondern durch eine irrationale Zahl darstellen läßt, dann könnte man vermuten, daß die Resonanzkatastrophe vielleicht ganz ausbleibt. Nun liegen aber schon die rationalen Zahlen auf der Zahlengerade dicht, d.h. zwischen zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen und außerdem noch viel mehr irrationale Zahlen. Weil aber die Umlaufzeiten nur mit endlicher Genauigkeit bekannt sind, ist die Frage, ob es überhaupt eine langfristig stabile Bewegung geben kann oder ob eben in der Regel ein deterministisches Chaos herrscht, sicher nicht trivial, da sich nicht entscheiden läßt, ob das Verhältnis rational oder irrational ist.

Eine Antwort darauf gibt das schon erwähnte KAM-Theorem von Arnold, Moser und Kolmogoroff, das besagt, daß bei Störung eines integrablen Systems diejenigen invarianten Kurven erhalten bleiben, deren Frequenzverhältnis ω_1/ω_2 (oder Periodenverhältnisse) hinreichend irrational ist. Genauer besagt es, daß alle invarianten Bahnen mit

$$| \omega_1/\omega_2 - p/q | > K(\varepsilon) / q^{5/2}$$

für beliebige teilerfremde Zahlen p und q erhalten bleiben (dabei sei $\omega_1 < \omega_2$). $K(\varepsilon)$ ist eine Konstante, die nur von der Störung ε des integrablen Systems abhängt und mit ε gegen Null geht. Um jedes rationale Frequenzverhältnis $\omega_1/\omega_2 = p/q$ gibt es einen schmalen Bereich von der Größe $K(\varepsilon)/q^{5/2}$, in dem obige Ungleichung verletzt ist, wo also Chaos möglich ist. Je irrationaler allerdings das Frequenzverhältnis ist, d.h. je größer der Nenner q in p/q ist, desto schmaler wird der Bereich der chaotischen Lücken. Man könnte zwar annehmen, daß obige Ungleichung fast immer verletzt ist, da die rationalen Zahlen ω_1/ω_2 auf der Zahlengerade dicht liegen und mit jedem rationalen Frequenzverhältnis p/q ein ganzes Intervall

$$| \omega_1/\omega_2 - p/q | \leq K(\varepsilon) / q^{5/2}$$

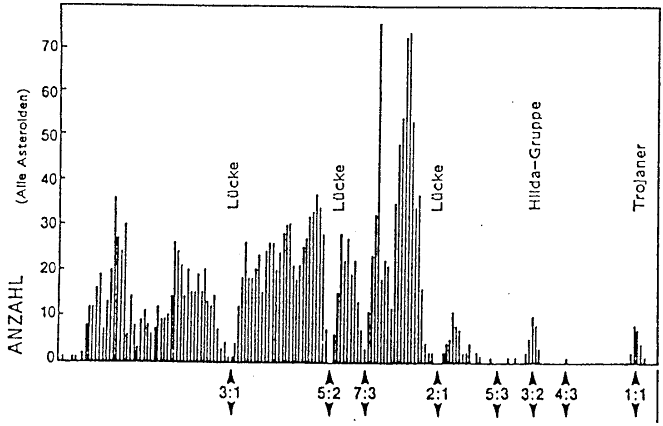
durch vorherige Ungleichung ausgeschlossen ist. Doch wie eine einfache Abschätzung zeigt, bleiben bei hinreichend schwacher Störung Bereiche regulärer Bewegung übrig, denn für die Gesamtlänge der Lücken im Einheitsintervall ergibt sich:

$$\sum_{p,\,q;\,p<q} \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{p}{q} \right| \leq \sum_{q=2}^{\infty} \frac{qK(\varepsilon)}{q^{5/2}} = K(\varepsilon) \sum_{q=2}^{\infty} q^{-3/2}$$

Da $\sum q^{-3/2}$ konvergiert, geht die Intervallsumme mit ε gegen Null, d.h. für genügend kleine Störungen ε läßt sich die nicht von invarianten Kurven ausgefüllte Fläche beliebig klein machen. Bei hinreichend kleinen Störungen existieren also noch invarianten Kurven (sog."KAM-Kurven"), die als Barrieren eine globale Chaosausbreitung verhindern.

Das KAM-Theorem beweist aber nicht nur die Existenz regulärer Bewegungen, sondern liefert auch einen Algorithmus, der es u.a. gestattet, die unter Störungen stabilste Bahn zu berechnen. Und diese Bahn hat das Periodenverhältnis der irrationalsten aller Zahlen, und das ist, wie wir früher gezeigt haben, der Goldene Schnitt $g = 0.5(\sqrt{5}-1) = 0.618...$ Denn der Goldene Schnitt läßt sich am schlechtesten durch den effektivsten Algorithmus zur Berechnung irrationaler Zahlen darstellen. Der effektivste - weil am schnellsten konvergente - Algorithmus ist die Approximation irrationaler Zahlen durch Kettenbrüche und die Folge der Kettenbrüche des Goldenen Schnitts lauten: 1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, ... - das sind die Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen. Der gegen Störungen stabilste kosmische Akkord ist also durch den Goldenen Schnitt als irrationalste, am schlechtesten rational approximierbare Zahl gegeben. Gerade in dem Fehlen von Konsonanz und damit auch von Resonanz tritt das antipythagoreische Prinzip der kosmischen Stabilität deutlich hervor.

Kommen wir zu den stärksten Resonanzeinbrüchen im Asteroidengürtel, den Kirkwood-Lücken, zurück, welche bei der Oktave (1:2; Hecuba-Lücke), der Duodezime (1:3; Hestia-Lücke), der Dezime (2:5), der Quarte (3:4) (hier kreist allein Thule) und bei 3:7 liegen. Das Fibonacciverhältnis (2:3) der Quinte ist dagegen nicht so gut konsonant, weil es schon eine bessere Approximation des Goldenen Schnitts darstellt, weshalb die Lücke nicht so ausgeprägt ist (es befindet sich hier die sog. Hilda-Gruppe). Entscheidend für die Stabilität des Planetensystems ist die Frage, wie konsonant ein Sphärenakkord sein darf, also rational approximierbar, damit keine zerstörenden Resonanzen auftreten. Die Antwort darauf ist das KAM-Theorem, wonach zu jedem nichtrationalen kosmischen Akkord eine nichtverschwindende kritische Störung existiert, sodaß dadurch das System sein Langzeitverhalten nicht grundsätzlich ändert. Danach ist klar, daß der konsonante Sphärenklang der kleinen Sexte (5:8) am längsten überlebt, obgleich auch für ihn eine Störung existiert, die ihn letztlich zu Fall bringt.



10. Chaos im Kosmos

Jack Wisdom, der Computersimulationen von Planetoidenbahnen über einen Zeitraum von 300000 Jahren durchführte, konnte zeigen, daß Kleinplaneten, die über 100000 Jahre lang auf scheinbar stabilen Bahnen um die Sonne kreisten, plötzlich aus dem Asteroidenverband auszuscheren begannen, die Marsbahn überquerten und bis in Erdnähe vordrangen. Derart chaotische Bahnbewegungen können keineswegs als bloße Computerspielerei abgetan werden, sondern weisen darauf hin, daß in ferner Zukunft durchaus manche Kleinplaneten der Erde so nahe kommen können, wie das in der Vergangenheit schon mehrmals der Fall war. Beispielsweise näherte sich der Planetoid Hermes auf nur doppelte Mondentfernung. Es kann nicht völlig ausgeschlossen werden, daß derartige Ereignisse in der Vergangenheit Katastrophen ausgelöst haben, wie z.B. das Aussterben der Dinosaurier vor 65 Millionen Jahre.

Wisdom konnte auch zeigen, daß eine besonders chaotische Zone im Bereich der 1:3 Kommensurabilität zu Jupiter liegt. Diese Kirkwood-Lücke ist zwar eine der größten, aber dennoch nicht völlig frei von Planetoiden. Zwei davon, Alinda und Quetzcoatl, stehen mit Jupiter in Resonanz und könnten eines Tages in Erdnähe gelangen. Ein anderer, AC 1989, wird im Jahr 2004 in nur 1,6 Millionen km Entfernung an der Erde vorbeifliegen.

Wie steht es aber nun mit dem Resonanzverhältnis zwischen Jupiter und Saturn, welches ziemlich genau 2:5 beträgt und daher eher dem pythagoreischem Konsonanzprinzip als kosmisches Stabilitätskriterium gerecht zu werden scheint als dem Stabilitätskriterium infolge Resonanzfreiheit. Tatsächlich zeigen aber die Messungen der vergangenen Jahrhunderte, daß die Bahnen von Jupiter und Saturn auseinanderdriften, sodaß die vermeintliche Stabilität des reinen Quintakkords eher der Grund für deren Instabilität ist. Zum Glück stellen die Sphärenharmonien von Jupiter und Saturn doch keine pythagoreisch reine Konsonanz dar, um eine langfristige Resonanzkatastrophe hervorzurufen, was dem Leben auf der Erde mit Sicherheit nicht gut bekommen würde, da sie dadurch leicht aus ihrer Bahn geworfen werden könnte.

Eine mit den Kirkwood-Lücken vergleichbare Erscheinung stellt das Ringsystem des Saturn dar, der aus einer Vielzahl kleiner Staub- und Eisteilchen und größeren Gesteinsbrocken bis zu 10 m im Durchmesser besteht. Diese Teilchen haben es irgendwie nicht geschafft zu einem Mond zu kondensieren, sondern umkreisen den Saturn vielmehr als breites Band vieler kleiner Monde. Das Auffälligste an diesem Band sind allerdings die Lücken, deren größte die über 4000 km breite Cassini-Teilung ist, welche schon mit einem schwachen Fernrohr erkennbar ist. Diese größte Lücke befindet sich gerade dort, wo die Gesteinsbrocken mit der halben Umlaufzeit des Saturnmondes Mimas und einem Drittel des Saturnmondes Enceladus fliegen würden. Auch die zweitgrößte Lücke steht mit Mimas in Resonanz: hier wäre die Umlaufzeit der fehlenden Brocken genau ein Drittel der von Mimas. Infolge der Resonanzen wird gleichsam systematisch an diesen kleinen Objekten gezogen, sodaß sie im Laufe der Zeit ihre Umlaufbahnen geändert haben. Die Bahninstabilitäten infolge von Resonanzen fungieren wie ein kosmischer Besen, der langfristig bestimmte Bahnen freikehrt. Andererseits hat es den Anschein, daß gewisse Kommensurabilitäten stabilisierend wirken, wie die schon oben erwähnte Resonanz zwischen Jupiter und Saturn. Ähnliches gilt auch für die beiden Saturnmonde Hyperion und Titan, die miteinander in einem Resonanzverhältnis von 4:3 stehen, oder die Saturnmonde Encladus und Dione, deren Umlaufbahnen zueinander im Verhältnis von 1:2 stehen. Da auch diese Verhälnisse nur wenige Zehntelprozent von den genauen rationalen Werten abweichen, stellt sich die gleiche Frage wie beim Saturn-Jupiter-Verhältnis, ob sie vielleicht doch nicht exakt pythagoreisch rein sind, sodaß eine langfristige Resonanzkatastrophe verhindert wird.

Nachdem Wisdom bereits für Kleinplaneten deterministisches Chaos voraussagte, stellt sich erneut die Frage, ob nicht die Planeten selbst davon betroffen sind. Zur Beantwortung dieser Frage gaben Sussmann und Wisdom die Bahndaten der äußersten fünf Planeten Saturn, Jupiter, Uranus, Neptun und Pluto ein und ermittelten deren Bewegung in Schritten von 32,7 Tagen über einen Zeitraum von 845 Millionen Jahre, das sind immerhin 20% des Alters des Sonnensystems. Das Ergebnis dieser fünf Monate dauernden Rechnung war, daß zumindest die Plutobahn in mehr als 20 Millionen Jahre unvorhersagbar wird.[31] Manche Autoren vermuten, daß die hohe Exzentrizität der Plutobahn und dessen starke Neigung zur Ekliptik möglicherweise schon auf chaotisches Verhalten zurückzuführen ist.[32] Im Prinzip genügt aber schon eine chaotische Planetenbahn, daß auch die anderen letztlich davon betroffen sind, wenn auch der Einfluß auf größere Planeten möglicherweise vernachläßigt werden kann. Auch die innersten vier Planeten Merkur, Venus, Erde und Mars wurden bereits auf Chaos hin untersucht. Wie die Rechnungen von Laskar zeigen, lassen sich diese bestenfalls auf einige Jahrmillionen vorausberechnen. Selbst eine auf 15 m genaue Positionsbestimmung der Erde gestattet keine Voraussage über mehr als 100 Millionen Jahre, der Grund liegt in der sensitiven Abhängigkeit des Systems gegenüber kleinsten Abweichungen in den Anfangs- bzw. Randbedingungen. Laskar kommt daher zu dem Schluß, daß unser Sonnensystem chaotisch ist und nicht quasiperiodisch.[33] Damit scheint sich auch für unser Sonnensystem, das Jahrhunderte lang als der Inbegriff der Stabilität angesehen wurde und deren himmelsmechanische Beschreibung einst als Paradebeispiel deterministischer Berechenbarkeit galt, das Gegenteil herauszukristallisieren, daß es möglicherweise nicht stabil ist. Wenn auch in ferner Zukunft Instabilitäten auftreten mögen, so ist doch bemerkenswert, daß unser Sonnensystem während der vergangenen viereinhalb Milliarden Jahre stabil ist und die Frage scheint berechtigt, warum über derart riesige Zeiträume chaotische Bahnen stabil sein können. Vielleicht gibt es in unserem Sonnensystem noch eine verborgene Harmonie, die für die Langzeitstabilität verantwortlich ist. Denkbar wäre, daß es bestimmte Grenzen gibt, innerhalb deren chaotisches Verhalten keine Instabilität ermöglicht. Vielleicht sind gerade unsere neun Planeten die "Überlebenden" eines Selektionsprozesses, der am Beginn der Entstehung des Sonnensystems gestanden hat, als sich die einzelnen Planeten aus dem Urnebel entwickelten.

---

31. Sussmann, G.J./ Wisdom, J.: Science 241, 433, 1988
32. Vaas, R.: Naturwiss. Rundschau, 40, 409, 1987
33. Laskar, J.: Nature 338, 237, 1989

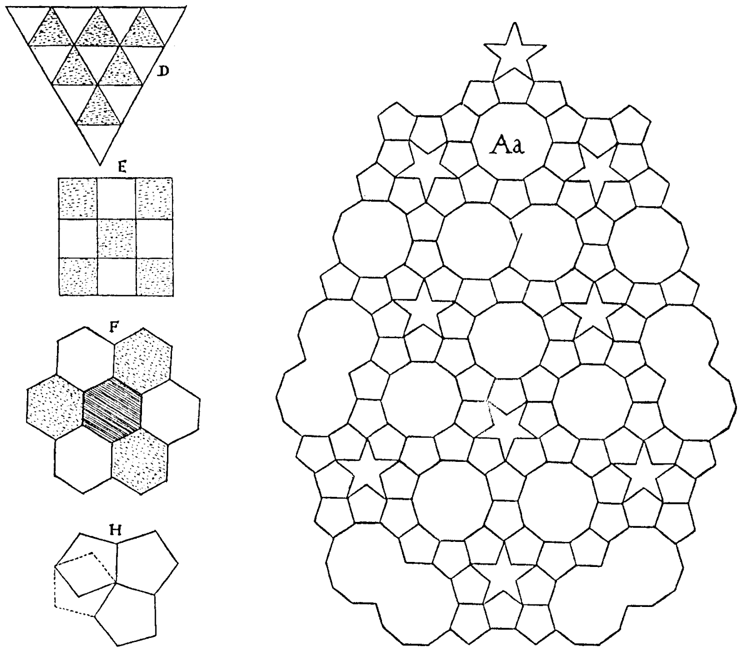
11. Quasikristalle und der Goldene Schnitt

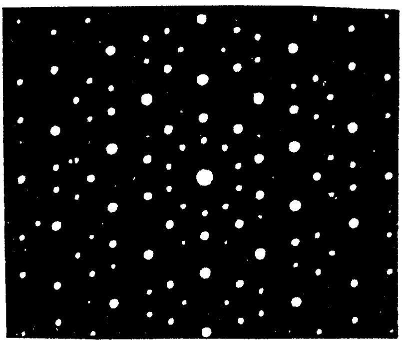
J. Kepler beschäftigte sich nicht nur mit dem Planetensystem, sondern war auch an der Kristallographie interessiert. So bewies er in seinem 1619 erschienen Werk "Harmonices Mundi Libri V", daß Elemente nur dann zum Aufbau eines periodischen Gitters geeignet sind, wenn sie nur ein-, zwei-, drei-, vier- und sechszählige Rotationsachsen besitzen.[34] Insbesondere lieferte er einen Beweis, daß mit Elementen, die fünfzählige Drehachsen besitzen, ein flächen- bzw. raumfüllendes periodisches Gitter nicht aufgebaut werden kann. Eine Ebene kann bekanntlich mit Quadraten oder mit Sechsecken, wie die Bienenwaben, oder ein Raum mit Würfeln lückenlos bedeckt werden. Eine Ebene dicht, also ohne Lükken, mit Fünfecken oder einen Raum dicht mit Ikosaedern auszufüllen, ist dagegen zum Scheitern verurteilt. Kepler versuchte sich an dem Problem der Flächendeckung in fünfzähliger Symmetrie, indem er außer regulären Fünf- und Zehnecken noch fünfzählige Sterne zu Hilfe nahm, doch dies gelingt nur, wenn man die "Verschmelzung" zweier Zehnecke zuläßt. Kepler bemerkt hierzu: *Das Reich dieser Sekte ist ungesellig (...). Will man diese überallhin fortsetzen, so muß man gewisse Ungetüme heranziehen, nämlich die Verbindung zweier Zehnecke, von denen je zwei Seiten wegenommen sind.*[35]

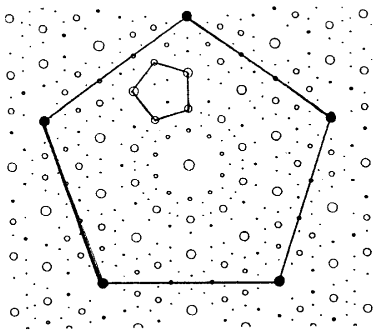
Die Unvereinbarkeit fünfzähliger Rotationssymmetrie mit der Translationinvarianz eines zwei- oder dreidimensionalen Gitters gehörte bis vor kurzem noch zu den ältesten und fundamentalsten Grundregeln der Kristallographie. Umso überraschter waren die Physiker, als 1984 Schechtman und seine Kollegen im Beugungsbild von Röntgenstrahlen einen Festkörper mit fünfzähliger Symmetrie entdeckten.[36] Kühlt man eine geschmolzene Legierung aus Aluminium und Mangan rasch ab, so erhält man weit verzweigte, dendritische Muster wie bei den Schneekristallen, nur daß es sich hier nicht um eine sechszählige, sondern fünfzählige Symmetrie handelt. Untersuchungen der Mikrostruktur ergaben, daß der Stoff offensichtlich eine neue Art von Ordnung verkörpert, die weder kristallin ist, wie herkömmliche Kristalle, noch völlig amorph, wie metallische Gläser. Da sie irgendwo in der Mitte zwischen kristallin und amorph angesiedelt sind, gab man ihnen den Namen Quasikristalle. Zu Ehren ihres Entdeckers nennt man sie auch Schechtmanite.[37]

---

34. Kepler, J.: Weltharmonik. a.a.O.
35. Kepler, J.: a.a.O.
36. Schechtman, I.A. et al.: Metallic Phase with Long-Range Oriental Order and No Translational Symmetry. Phys. Rev. Lett. 53, S 1951, 1984
37. Nelson, D.R.: Quasikristalle. in: Chaos und Fraktale, Spektrum der Wissenschaft. Heidelberg 1989


D
E
F
H
Aa

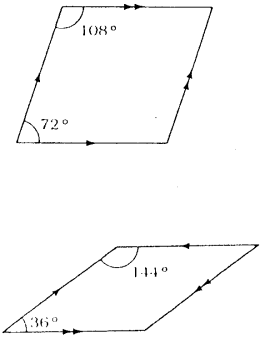


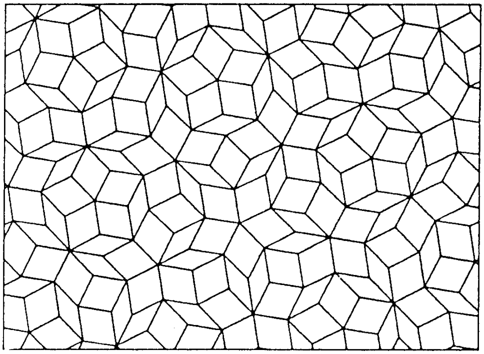


Das Überraschende an dem Beugungsbild war nicht allein das Vorhandensein von fünfzähligen Symmetrieachsen, sondern zugleich die Schärfe der Reflexe, welche darauf hindeuteten, daß die Atome nach einer strengen Regel im Material verteilt sein mußten. Einerseits konnte es sich nicht um ein periodisches Gitter handeln, andererseits mußte eine Fernordnung vorliegen. Der normale Kristall besitzt zwei Arten von Fernordnung: eine Orientierungs- und eine Translations-Fernordnung. Jeder herkömliche Kristall läßt sich aus identischen sog. Elementarzellen, wie man den Grundbaustein des Kristalls nennt, aufbauen, indem man diese in verschiedenen Richtungen aneinanderreiht. Entsprechende Kanten und Seitenflächen liegen dabei parallel - sie sind gleich orientiert. Ferner genügt es deren genaue Lage und Entfernung in irgendeinem kleinen Ausschnitt des Kristalls zu untersuchen, um zu wissen wie es anderswo im Kristall aussieht. Diese Eigenschaft bezeichnet man als Translations-Fernordnung.

Auf der Suche nach einer theoretischen Erklärung dieser experimentellen Fakten, kamen die Arbeiten von R. Penrose aus den siebziger Jahren sehr gelegen, der sich schon damals um eine Erweiterung des Gitterbegriffs bemühte. Wie einst schon Kepler versuchte Penrose eine Fläche in fünfzähliger Symmetrie lückenlos zu überdecken, doch im Gegensatz zu Kepler löste er das Problem mit einem Trick, indem nur Bauelemente benützte, die selbst noch nicht die fünfzählige Symmetrie aufweisen. Mit Hilfe zweier Rauten gelang es ihm ein zweidimensionales quasiperiodisches Gitter mit fünfzähliger Symmetrie zu konstruieren. Dieses Gitter ist zwar nicht periodisch - es gibt keine einzige Elementarzelle, die sich unendlich oft wiederholt - weist aber dennoch eine Orientierungs-Fernordnung unendlicher Reichweite auf. Genaugenommen weisen diese Penrose-Parkettierungen im großen ganzen auch eine Translations-Fernordnung auf, was ersichtlich wird, wenn man alle Rhomben einfärbt, bei denen zwei der vier Seiten parallel zu einer vorgegebenen Richtung liegen. Man erhält so fünf verschieden Linienscharen, die sich unter Winkeln von Vielfachen von 72° , d.h. einem Fünftel eines Kreises, schneiden. Statistisch gesehen, besitzt ein Penrose-Muster daher außer der Orientierungs- ebenfalls eine Translations-Fernordnung. Weil das Penrose-Muster zwar eine Richtungs-, aber keine strenge Translationsordnung besitzt, entzieht es sich dem Verbot der fünfzähligen Symmetrie und überdeckt dennoch die Ebene lückenlos.

A. Mackay, der die vorhin erwähnten Linien in den ebenen Penrose-Mustern 1981 entdeckte, welche den Netzebenen in einem herkömmlichen Kristall entsprechen, konnte eine Erweiterung für den dreidimen-





sionalen Fall angeben, wodurch jene von Schechtman und seinen Kollegen gefundenen Beugungsdiagramme zustande kommen sollen.[38]

Waren es in der Ebene zwei Rauten, so handelt sich im Raum um zwei Arten von Rhomboedern, aus welchen nach einer mathematischen Vorschrift von P. Kramer und R. Neri ein dreidimensionales quasiperiodisches Gitter, man spricht hier von Penrose-Packungen, konstruiert werden kann. Ein essentieller Bestandteil der graphischen Konstruktion eines Quasigitters ist hierbei die Periodizität eines Gitters in einem höherdimensionalen Raum.[39]

Die große Faszination der Penrose-Muster und der Quasikristalle besteht gerade darin, daß sie sich nicht aus einer einzigen Elementarzelle aufbauen lassen - indem man einfach mehr und mehr dieser Zellen aneinanderreiht, wie das normalerweise bei den anderen flächendeckenden oder raumerfüllenden Gittermustern der Fall ist - und dennoch unbestreitbar eine ganzheitliche Form aufweisen, wo jedes lokale Muster, welches überall ein wenig anders ist, auf das Gesamtmuster abgestimmt sein muß. Damit stellt sich sofort die Frage, wie Quasikristalle überhaupt unbegrenzt wachsen können, sodaß sich die Kanten und Flächen nicht doch einmal überschneiden und der Wachstumsprozeß zu Ende kommt. Bei den normalen Gittermustern wird die "Entscheidung" lokal - gewissermaßen "vor Ort" - getroffen. Doch bei der fünffachen Symmetrie des Quasikristalls genügt diese Regel nicht, da

---

38. Urban, K./ Kramer, P./ Wilkens, M.: Quasikristalle, Phys. Bl. 42, S 373, 1986
39. Kramer, P./ Neri, R.: On Periodic and Nonperiodic Space Fillings of E Obtained by E Projection, Acta cryst. A 40, S 580, 1984

jede lokale Erweiterung auf das Gesamtmuster "Rücksicht" - oder sollte man besser "Vor(aus)sicht" sagen - nehmen muß. Doch wie um alles in der Welt sollen sich die einzelnen Gitterbausteine nach der erst werdenden Gesamtstruktur richten? Gibt es so etwas wie einen nichtlokalen organisierenden Einfluß, der möglicherweise Prozesse miteinschließt, die auf der Quantenebene angesiedelt sind, von denen bekannt ist, daß sie Korellationen außerhalb der üblichen Raumzeit ermöglichen? Die Idee der Nichtlokalität gehört zu den inhärenten Eigenschaften der Quantentheorie und berührt wichtige erkenntnistheoretische Fragen zum Realitätsbegriff, wie die jüngeren Debatten um das berühmte EPR-Paradoxon zeigen, welches erstmals 1935 von Einstein, Podolski und Rosen aufgeworfen wurde. Bislang scheint es vollkommen rätselhaft zu sein, wie weit voneinander entfernte Punkte, sowohl räumlich als auch zeitlich gesehen, miteinander in Verbindung treten können, sodaß im Endeffekt ein hochkohärentes Muster entsteht. Sollten Quasikristalle tatsächlich nicht nur lokal, sondern in irgendeiner Weise auch global gesteuert werden? Inwieweit diese Vermutung stimmt oder ob nicht doch ganz "normale" Gründe gefunden werden, bleibt zukünftigen Forschungen - die auf diesem Gebiet intensiv vorangetrieben werden - vorbehalten.

Sowohl die Penrose-Rauten als auch die Penrose-Rhomboeder stehen in direkter Beziehung zum Goldenen Schnitt, was bei einer fünfzähligen Symmetrie nicht allzu verwunderlich ist, hängt doch das reguläre Fünfeck und das Pentagramm zuinnerst mit dieser irrationalen Zahl zusammen. Er tritt bei den zweidimensionalen Penrose-Mustern und den dreidimensionalen Penrose-Packungen, den Quasikristallen, gleich in mehrfacher Weise auf. Sowohl im zwei- wie auch im dreidimensionalen Fall steht die Anzahl der beiden Rauten bzw. Rhomboeder im Verhältnis des Goldenen Schnitts. Aufgrund dieses irrationalen Verhältnisses ist es auch unmöglich, das unendliche Muster (Packung) in eine einzige Elementarzelle zu zerlegen, die eine ganze Zahl jeder Rhomben- bzw. Rhomboederart enthält. Aber auch die Flächen bzw. die Volumina stehen im Verhältnis des Goldenen Schnitts. Und nicht zuletzt auch die Diagonalen der beiden Seitenflächen, aus denen die beiden Rhomboeder aufgebaut sind.

Die Penrose-Muster bzw. die Penrose-Packungen, wie sie in den Quasikristallen verwirklicht sind, verkörpern, wie gesagt, eine neue Art von Kristallstruktur. Während herkömmliche Kristalle Paradebeispiele für strenge Ordnung sind, aufgebaut auf rationalen Proportionen, und amorphe Strukturen, wie z.B. Gläser, keine erkennbare Ordnung aufweisen - und damit eher ein Beispiel für Unordnung abgeben - , nehmen Quasikristalle eine Art Zwischenstellung zwischen diesen beiden extremen Positionen ein. Indem sie an der Grenze zwischen Ordnung und Unordnung (Chaos) angesiedelt sind, geben sie ein konkretes Beispiel ab für das, was wir unter Harmonie verstehen: Balance zwischer strenger Ordnung und totalem Chaos. Wir werden auf diesen Zusammenhang noch mehrmals zurückkommen.[40]

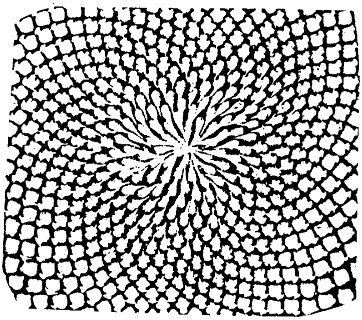
12. Phyllotaxis und der Goldene Schnitt

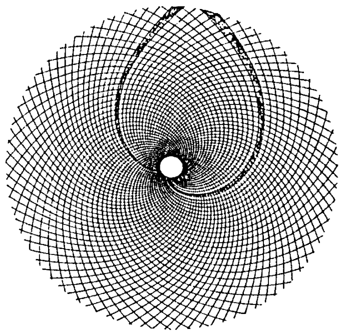
Wenden wir uns nun von leblosen Kristallen einem lebendigen Bereich zu, dem Pflanzenreich, womit Kepler sich ebenfalls ausführlich beschäftigte und wo die Sectio Divina, wie er den Goldenen Schnitt nannte, auch eine wesentliche Rolle spielt: der Phyllotaxis, d.h. der Anordnung von Blättern und Blüten. Das Phänomen der spiraligen Blattanordnung ist in der Natur weit verbreitet und der Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt via den Fibonacci-Zahlen seit langem bekannt. Wie früher schon ausgeführt, versteht man darunter jene Folge von Zahlen, die mit den Gliedern 0 und 1 beginnt, und in der sich die weiteren Glieder jeweils aus der Summe der beiden vorangehenden Glieder errechnet. Das rationale Verhältnis benachbarter Zahlen approximiert den Goldenen Schnitt umso besser, je weiter man in der Folge voranschreitet. Schon Kepler erkannte, daß die Anordnung der Blätter vieler Pflanzen in unmittelbarer Beziehung zu den Fibonacci-Zahlen steht. Wo immer in der Natur eine spiralige Anordnung realisiert ist, ob bei den Schuppen eines Kiefernzapfens oder der Ananasfrucht, den Blättern einer Palme, dem Fruchtstand einer Sonnenblume oder Distel, usw., überall erhalten wir zueinander gegenläufige ungleiche Spiralen, Parastichien genannt, wenn wir jeweils die Ansatzpunkte benachbarter Blätter miteinander verbinden. Dabei ergibt die Anzahl der Spiralen, sowohl rechts als auch links herum, entlang eines vollen Kreisumlaufs immer eine Fibonacci-Zahl bzw. seltener eine Zahl, die von dem gleichen Bildungsgesetz mit anderen Ausgangszahlen ausgehend entsteht, wie dies gelegentlich z.B. bei Kakteen zu beobachten ist, wo die Folge statt mit 0,1 mit 1,3 beginnt (Lukas-Zahlen).

---

40. Krammer, A.: Keplers Gedanken über Harmonie aus der Sicht neuer Erkenntnisse in den Naturwissnschaften. in: Philosophie der Naturwissenschaften. Akten des13. Intern. Wittgenstein-Symposion. Wien 1989

Betrachtet man etwa eine Sonnenblume, so gehört jeder Kern zu genau einer linksdrehenden und genau zu einer rechtsdrehenden Spirallinie - und wenn man diese zählt, so ergeben sich beispielsweise 55 links- und 89 rechtsdrehende Spiralen. Bei anderen Fruchtständen treten kleinere oder höhere Paare von benachbarten Fibonacci-Zahlen auf. Bei der Ulme und Linde stehen die Blätter eines Zweiges abwechselnd auf der einen und auf der entgegengesetzten Seite; man spricht hier von 1:2 Phyllotaxis. Bei Buche und Haselnuß gelangt man von einem Blatt zum nächsten durch eine schraubenförmige Drehung um ein Drittel einer Vollumdrehung; es handelt sich hier um eine 1:3 Phyllotaxis. Entsprechend weisen Marillenbäme, Apfelbäume und Eichen eine 2:5 Phyllotaxis auf. Pappeln und Birnbäume eine 3:8 Phyllotaxis, Weiden und Mandelbäume eine 5:13 Phyllotaxis usw. Berücksichtigt man, daß eine Drehung um 3/8 im Uhrzeigersinn einer Drehung um 5/8 entgegen dem Uhrzegersinn entspricht, dann erhalten wir auch in diesem Fall Brüche aus benachbarten Fibonacci-Zahlen, die, wie gesagt, eine sehr gute Annäherung an den Goldenen Schnitt darstellen.





Einen unmittelbaren Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt erhält man auch, wenn man die Blätter in der Reihenfolge ihrer Ontogenese, d.h. entsprechend der zeitlichen Abfolge ihrer Entstehung, miteinander verbindet. In dieser sog. genetischen Spirale folgt ein Blatt dem anderen jeweils im Winkel von ca 137,5°; das ist der Goldene Winkel, der den Kreisumfang im Verhältnis des Goldenen Schnitts teilt. Neben der Bevorzugung des Goldenen Winkels bei der spiraligen Blattanordnung gibt es aber auch Pflanzen, die keine Spiralmuster zeigen, sondern wo der Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Blättern 180°, 90° oder einem andern rationalen Teiler von 360° entsprechen. Die interessante Tatsache ist jedoch, daß, wo immer man in der Natur Blattanordnungen untersucht, sich die beiden extremen Möglichkeiten zeigen: Entweder sind die Blätter in einem besonders rationalen Verhältnis angeordnet oder entsprechen dem irrationalen Verhältnis des Goldenen Schnitts.

Es erhebt sich damit die Frage, warum die Natur diese beiden extremen Möglichkeiten bevorzugt und wie beide Fälle mit einfachen physikalisch-chemischen Regulationsmechanismen erklärt werden können. In der Tat hat bereits Leonardo da Vinci die spiralige Anordnung der Blätter mit optimaler Ausnuntzung des Lichts in Zusammenhang gebracht und 250 Jahre später schreibt Charles Bonnet: *Das Laub ist so angeordnet, daß es sich so wenig wie möglich überdeckt, um Luft und Sonne freien Zutritt zu gewähren.*[41]

Erst unserer Zeit blieb es vorbehalten, ergänzend zu dieser finalen Betrachtungsweise ein kausales Modell zu entwerfen. Richter und Schranner gingen dabei von jenem Modell aus, welches Gierer und Meinhardt zur Erklärung der Morphogenese vorgeschlagen haben. Kurz gesagt besteht das Modell aus einem kurzreichweitigen autokatalytisch wirksamen Aktivator und einem langreichweitigen Inhibitor dieser Selbstverstärkung. Da der Aktivator das Zellwachstum, sprich Blattentwicklung, im Nahbereich stimuliert und der Inhibitor dafür sorgt, daß das nächste Blatt möglichst weit davon entfernt entsteht, ist klar, daß bei einem Kreis (genauer Zylinder) dieser zweite Blattansatz 180° sein muß. Das dritte Blatt wird aber allgemein nicht genau über dem ersten Blatt zu liegen kommen, da es von diesem sonst inhibiert wird, es sei denn die Inhibitorwirkung klingt rasch genug ab. Es wird sich daher ein Kompromiß herausbilden, wobei jedes n-te Blatt vom (n-1)-ten Blatt am weitesten, vom (n-2)-ten Blatt weniger weit und vom (n-3)-ten Blatt am wenigsten weit entfernt ist. Wie genaue Modellrechnungen zeigen, treten dabei keineswegs alle möglichen Winkel zwischen 90° und 180° auf, wie man zunächst meinen könnte, vorausgesetzt die Inhibitorwirkung wird geeignet gewählt. Vielmehr zeigten Richter und Schranner, daß bei Variation dieses Parameters eine Art Phasenübergang stattfindet, wodurch bei einem raschen Zerfall der Lebensdauer des Inhibitors das rationale Verhältnis 1/2 (180°) vorherrscht, hingegen bei einem langsamen Zerfall der Goldene Winkel (137,5°) bevorzugt wird.[42] Obgleich es verblüffend ist, daß mit einem derart einfachen Modell bereits so cha-

---

41. Bonnet, C.: zit. aus Eigen, M.: Goethe und das Gestaltproblem in der modernen Biologie. in: Schriften der Carl Friedrich von Siemens Stiftung, Bd. 2
42. Richter, P./ Schranner, R.: Leaf Arrangement - Geometry, Morphogenesis and Classification, Naturwissenschaften 65, S 319, 1978

rakteristische Merkmale der wirklichen Natur richtig nachgebildet werden können, darf das mathematische Modell nicht darüber hinwegtäuschen, daß die eigentlichen Wirksubstanzen erst gefunden werden müssen.