

# Konsonante Intervalle

Rudolf Stoessel

## Einleitung

Sicher lange bevor man im Zusammenhang mit den Tönen gemessen und gerechnet hat haben die Menschen Oktaven, Quinten, Quarten - später noch Terzen und Sexten - als etwas Besonderes, man darf ruhig sagen besonders Schönes, empfunden und damit musiziert.

Ich präge für diese Arbeit den Begriff "Konsonanzenreihe" und meine damit die Reihe

$$\frac{1}{1} c \quad \frac{5}{6} e^b \quad \frac{4}{5} e \quad \frac{3}{4} f \quad \frac{2}{3} g \quad \frac{5}{8} a^b \quad \frac{3}{5} a \quad \frac{1}{2} c'$$

bisweilen noch mit der schönen Naturseptime  $b^x \frac{4}{7}$ . (Die Brüche bedeuten die Verhältnisse der Wellen- oder Saitenlängen und ihre reziproken Werte diejenigen der Frequenzen.)

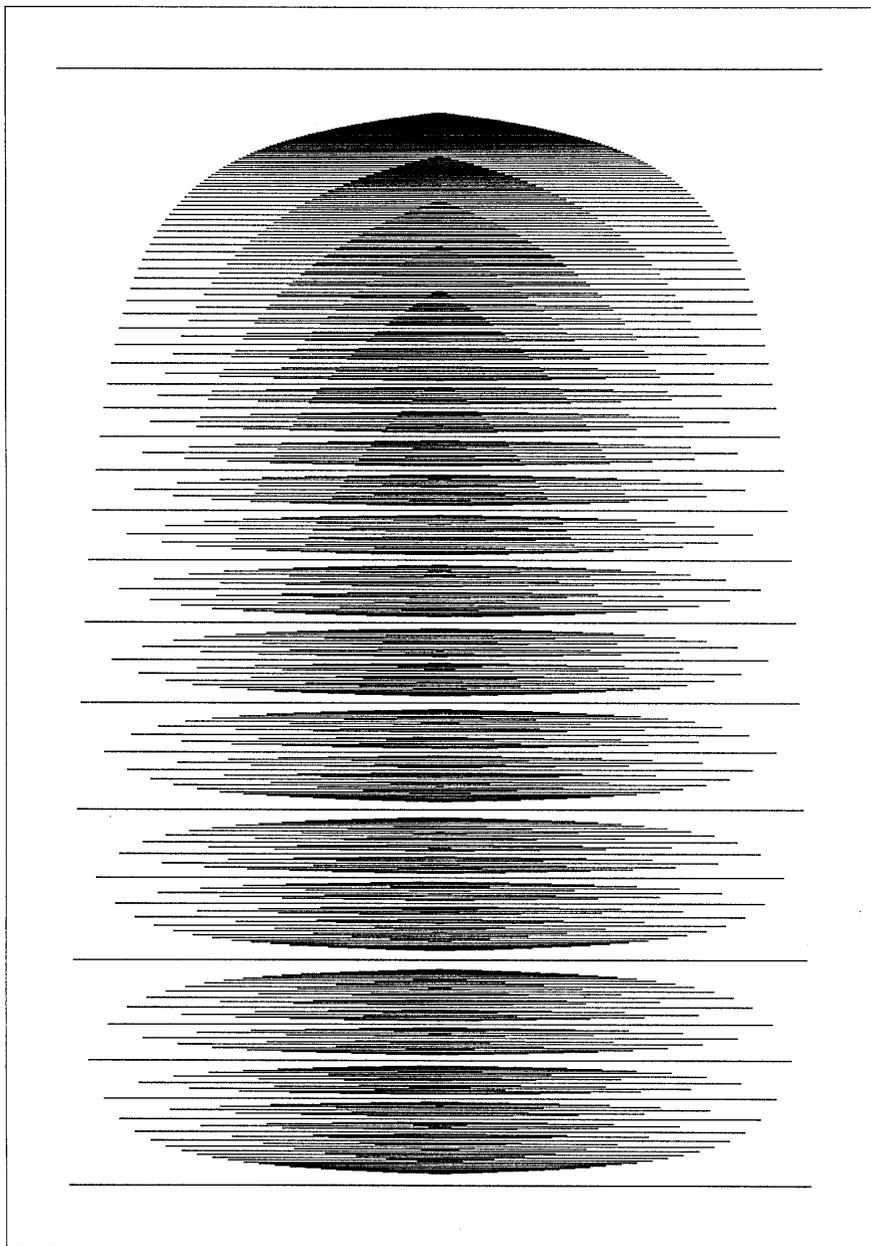
Ich habe mich gefragt, ob es außer unserer Empfindung und außer der Zuordnung der konsonanten Intervalle zu den kleinsten ganzen Zahlen (1, 2, 3, bei den Terzen und Sexten noch 5) noch andere Besonderheiten gibt, die diese konsonanten Intervalle auszeichnen. Im Folgenden werde ich einige solcher Besonderheiten aufzeigen, die mir neu waren. Ob sie auch allgemein neu sind, habe ich nicht untersucht.

Angeregt wurde ich durch ein Diagramm, eine graphische Darstellung sämtlicher echter Brüche, die man mit den Zahlen 1 bis 100 darstellen kann. (Ich bezeichne diese Brüche als Brüche vom Index 100.) Peter Neubäcker aus München hat dieses Diagramm mit Hilfe eines Computers hergestellt und es mir im Januar 1988 gezeigt. (Fig.1)<sup>1</sup>

Schon beim ersten Anblick war ich überrascht und fasziniert von der Schönheit des Bildes, von der Symmetrie, der rhythmischen Ordnung und besonders von den systematisch verteilten Leerstellen. Er besorgte

---

1. Das Diagramm Fig.1 ist dem Buch beigelegt als zweiteilige Zeichnung mit einer Gesamtlänge von 120 cm; die beiden symmetrischen Teile müssen in der Mitte zusammengeklebt werden. Nebenstehend ein Viertel des Diagramms.



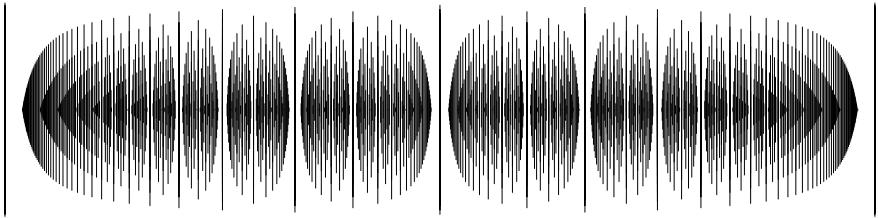


Fig. 1

mir Kopien, die ich dann zu Hause mit aller Muße ausmessen und analysieren konnte. Bei dieser Analyse zeigte sich eine Menge interessanter Funde.

Da es mehr als 3000 Brüche vom Index 100 gibt, enthält das Diagramm mehr als 3000 vertikale Striche, von denen jeder einem bestimmten Bruch zugeordnet ist. Das Diagramm hat eine Länge von 120 cm und kann unter die ebenso langen Saiten eines Monochords geschoben werden. Wenn man das tut, liegt jeder Strich dort, wo man einen Steg unter eine Monochordsaite stellen müßte, damit beim Anschlagen der Saite, rechts vom Steg, der dem Strich entsprechende Ton erklingen würde. Die Längen der vertikalen Striche sind von der horizontalen Längssymmetrieachse des Diagramms aus nach oben oder nach unten gemessen. Die größte Strichlänge, diejenige für den Scheinbruch  $1/1$ , sei  $l_0$ . Die Strichlänge für den Bruch  $m/n \Rightarrow l$  ist definiert durch die Gleichung

$$l = \frac{100 - n}{100} \times l_0$$

d.h. die Abnahme der Strichlänge  $D = l_0 - l$  wächst proportional dem Nenner  $n$  des Bruches. Es ist

$$D = \frac{l_0}{100} \times n$$



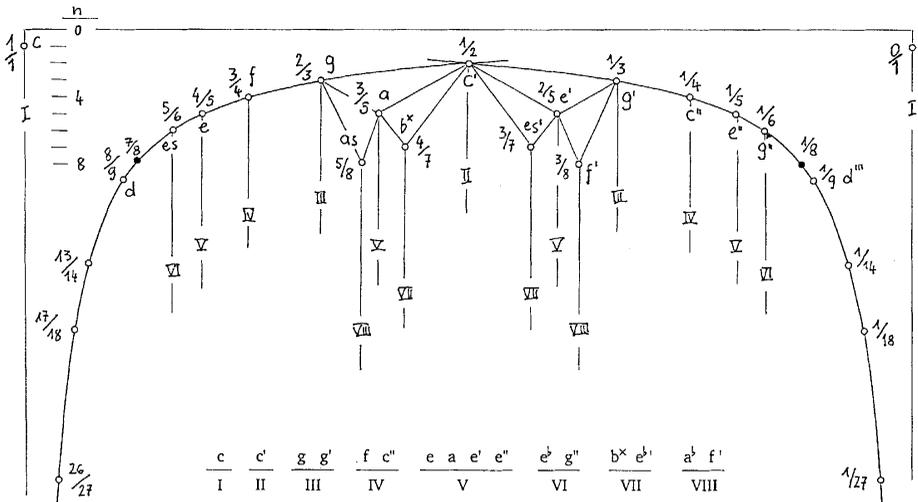


Fig. 2

Ich habe in Fig.2 die beiden oberen Umrißkurven links und rechts des verkleinerten Diagramms gezeichnet, und zwar in der Vertikalen ca. 10-fach überhöht. In dieser Grafik sind die auffallend isolierten Striche eingezeichnet und mit I bis VIII nach dem Schmälerwerden der Leergebiete angeschrieben.

Ich bezeichne in den Figuren jeweils den oberen Endpunkt eines vertikalen Striches mit dem Tonnamen, der zu ihm gehört, wenn man ihn als Saitenlängenverhältnis deutet. Brüche mit gleichen Nennern liegen gleichhoch. In Fig.2 sind die Höhen links oben durch eine mit n überschriebene Skala angegeben.

Man erkennt deutlich, daß die Isolationsbreite der Brüche abnimmt mit dem Konsonanzgrad der betreffenden Intervalle: Oktave, Quinte, Quarte, große Terz, große Sext, kleine Terz, Naturseptime, kleine Sext.

Es sieht so aus, als ob sich die Striche der anderen Intervalle nicht an die Striche der Konsonanzen heran getrauten. Sie lassen ihnen einen Freiraum zu ihrer Entfaltung und geben den entsprechenden Tönen eine große Toleranzbreite. Wird z.B. eine Quinte etwas falsch gespielt, so nimmt sie der Hörer nicht gleich für einen Nachbar-ton, sondern er hört sie zurecht, er nimmt sie als unreine Quinte. Das gibt ihr eine Dominanz und läßt sie sich durchsetzen.

Wir stehen hier vor einer neuen Eigenschaft der konsonanten Intervalle. Die Hierarchie der Konsonanzenreihe, die doch wohl nicht aus der Mathematik, sondern aus dem Schönheitsempfinden der Menschen gebildet ist, deckt sich mit derjenigen der Isolation der entsprechenden Brüche in der Gesamtheit aller Brüche bis zu einem gewissen Index.

Eine ähnliche Isolation der Brüche aus kleinen ganzen Zahlen findet man zu meiner Überraschung auch in der modernen Chaosforschung. Da ich mit dieser Forschung nicht vertraut bin, entnehme ich ein Zitat und die Fig. 3a einem Aufsatz von Chr. Toepffer mit den Titel "Deterministische Chaos-Strukturen im Unvorhersagbaren".<sup>2</sup>

Als Beispiel wird dort das Drei-Körper-Problem aus der Astronomie angeführt: Sonne (Zentralkörper 1), Planet (gestörter Körper 2), Störer (Körper 3). Zitat: "Das Dreikörperproblem ist nicht mehr exakt lösbar; aber man kann sich vorstellen, daß sich die vom Körper 3 verursachten Störungen an der Bahn des Planeten 2 aufschaukeln, wenn die Umlaufzeiten  $T$  in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen:  $T_2/T_1=r/s$ ."

In diesem Zusammenhang wird vom Kolmogorow-Arnold-Moser (KAM) - Theorem gesprochen, nach welchem um jedes rationale Periodenverhältnis  $r/s$  Lücken mit einer gewissen Breite bestehen. Dazu wird Fig. 3a gezeigt mit der Anschrift: Chaotische Lücken um rationale Verhältnisse von Umlaufzeiten  $T_2/T_1=r/s$ . Die schwarzen Rechtecke zeigen die Lücken um die Brüche.

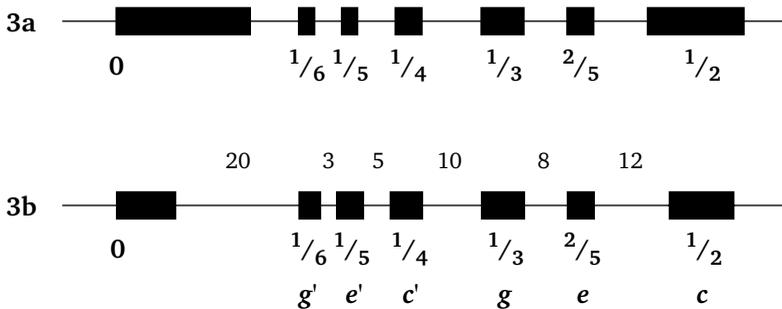


Fig. 3

2. "Deterministische Chaos-Strukturen im Unvorhersagbaren", Prof. Dr. Chr. Toepffer, erschienen in "Physik in unserer Zeit" 1991, Verlag VCH Weinheim.

In Fig. 3b habe ich die Lücken dargestellt, die durch die Isolation der den konsonanten Intervallen entsprechenden Brüche vom Index 20 entstehen. Die darüber geschriebenen Zahlen geben an, wieviele Brüche vom Index 20 sich zwischen diese Lücken drängen.

Es ist auffallend, wie die beiden Figuren 3 fast deckungsgleich sind. Ich weiß dafür keine Erklärung; aber es ist wohl denkbar, daß diese Entsprechung einmal eine Rolle spielen wird.

Mit dem bisher Gesagten ist auch schon die Bedeutung der obersten Kurve des Diagramms gefunden. Nach rechts tragen die Glieder dieser Kurve die Zahlen der harmonischen Reihe  $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ , also die Saiten- oder Wellenlängen der Obertonreihe oder die Frequenzen der Untertonreihe. Die Schritintervalle dieser Reihe sind bekanntlich Quinte, Quarte, große Terz, kleine Terz... Auf der linken, zur rechten symmetrischen Randkurve finden wir die Zahlen der konsonanten Intervalle Quinte, Quarte und beide Terzen, diesmal nicht als Schritte, sondern als Glieder.

Hier fehlen die Sexten. Wir werden sie in der nächsten und übernächsten Kurve antreffen. Sie scheinen einen geringeren Konsonanzgrad zu besitzen als die Terzen. Das ist mir auch in einer anderen Studie (über Kreisketten und pythagoräische Dreiecke) aufgefallen. Es ist auch so, daß die Frequenzverhältnisse aller anderen Konsonanzen (ohne die Sexten und  $b^*$ ) "überenteilige Brüche" sind, das heißt Brüche, in denen der Zähler um 1 größer ist als der Nenner,  $n + 1/n$ .

Da wir hier oft mit Saitenlängen operieren, müssen wir auch von "unterteiligen Brüchen" sprechen,  $n/n + 1$ , zum Beispiel  $5/6, 4/5, 3/4 \dots$ , in Fig. 2 längs der links gezeichneten Hyperbel.

Nun ist uns die linke und die rechte oberste Kurve des großen Diagramms bekannt. Es ist genau die Kurve, die von den Stegen auf dem Monochord gebildet wird, wenn wir die Obertonreihe aufbauen. Es ist also eine gleichseitige Hyperbel. Ihre Formel ist  $xy = a$ , wobei  $a$  eine konstante Größe ist. Diese zwei Kurven führen links und rechts und unten ins Unendliche, wo sie jeweils eine von zwei zueinander rechtwinkligen Geraden, die sogenannten Asymptoten berühren. Die beiden Hyperbeln sind in der Figur gezeichnet. Sie kreuzen sich im Punkt  $1/2$  und führen weiter zu den Punkten 1 oder 0. Die Asymptoten sind links, rechts und oben gezeichnet.

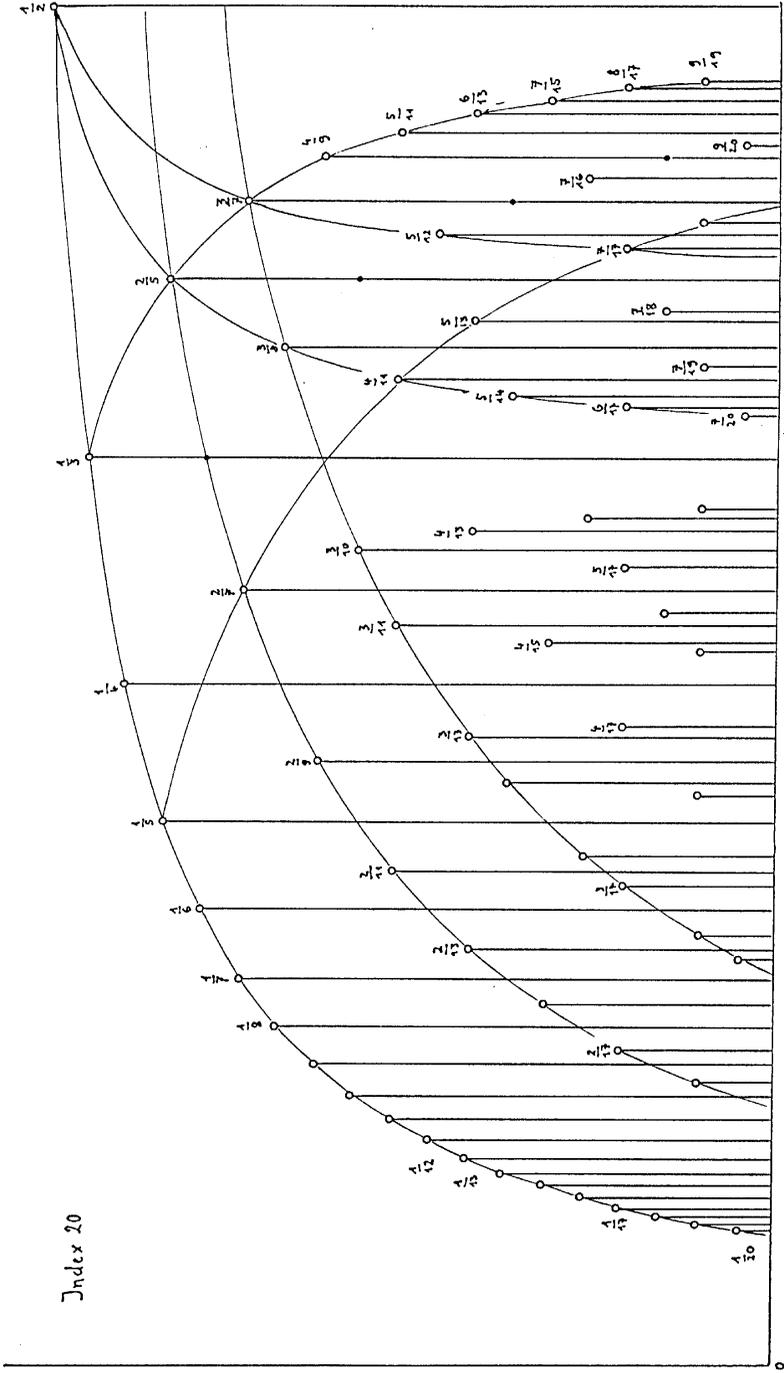


Fig. 4

Um die Kurven besser zu erkennen, habe ich für die Hälfte von 0 bis  $\frac{1}{2}$  das entsprechende Diagramm für Index 20 gezeichnet, allerdings links-rechts vertauscht (Fig. 4). Wir erkennen darin deutlich in der Randkurve von oben rechts nach links unten wieder die harmonische Reihe  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$ . Die rechte Hälfte des Diagramms kann man sich leicht vorstellen, denn sie ist symmetrisch zur linken Hälfte von 0 bis  $\frac{1}{2}$  mit der Symmetrieachse  $\frac{1}{2}$ . Dabei ist die Summe symmetrischer Brüche immer 1, z.B. ist  $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$ .

Jetzt können wir auch die zweitoberste, zur ersten "parallele" Reihe erkennen, mit den Zahlen  $\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11} \dots$ . In ihr liegt z.B.  $\frac{2}{5} e'$ , das wir schon in Fig.2 angetroffen haben. Alle diese Brüche haben denselben Zähler 2 und die Nenner sind der Reihe nach die ungeraden Zahlen. Mit den dazwischen liegenden Brüchen  $\frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{8} \dots$ , die alle schon in der oberen Reihe gekürzt vorkommen, ist das einfach die mit 2 erweiterte harmonische Reihe.

Die drittoberste Reihe besteht aus allen nicht kürzbaren Brüchen mit dem Zähler 3. In ihr liegt in der rechten Hälfte  $\frac{3}{5} a$ . So geht es weiter mit den Zählern 4, 5, 6 ... In der vierten Reihe rechts liegt  $\frac{4}{7} b^x$  und in der fünften  $\frac{5}{8} a^b$ . Alle diese Kurven, auch bei Index 100, sind gleichseitige Hyperbeln. Die Brüche bilden auf der einen Hälfte des Diagramms die mit 1, 2, 3 ..., 100 erweiterten harmonischen Reihen und auf der anderen Hälfte deren Ergänzung zu 1.

Aber auch alle steileren Kurven im Innern des Diagramms, die nach links oder nach rechts abfallen, folgen einfachen Gesetzen. Immer bilden sowohl die Zähler als auch die Nenner der Brüche verschiedene arithmetische Reihen, z.B.  $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9} \dots$  oder  $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{5}{12}, \frac{7}{17} \dots$ , im Zähler 1, 3, 5, 7 ... und im Nenner 2, 7, 12, 17 ... (Fig. 4). Das alles gilt ebensogut für den Index 100.

Zur Veranschaulichung habe ich einen Ausschnitt des großen Diagramms - er umfaßt 4% von 120 cm, also 4.8 cm - vergrößert gezeichnet (Fig. 5). Die vielen dargestellten Kurven und alle entsprechenden Kurven des ganzen Diagramms gehorchen dem einfachen Gesetz, daß die Zähler und die Nenner der Brüche zwei verschiedenen arithmetischen Reihen folgen. Zum Beispiel  $\frac{4}{11}, (\frac{6}{16}), \frac{8}{21}, (\frac{10}{26}), \frac{12}{31}, (\frac{14}{36}) \dots$ . Im Zähler ist die Differenz 4 und im Nenner 10. Die eingeklammerten Werte und die schwarzen Punkte in der Figur entsprechen kürzbaren Brüchen und müssen weggelassen werden, weil sie im Diagramm schon früher aufgetreten sind, aber für die "harmonikale Ordnung" muß man sie berücksichtigen. Der Begriff wird später erklärt.

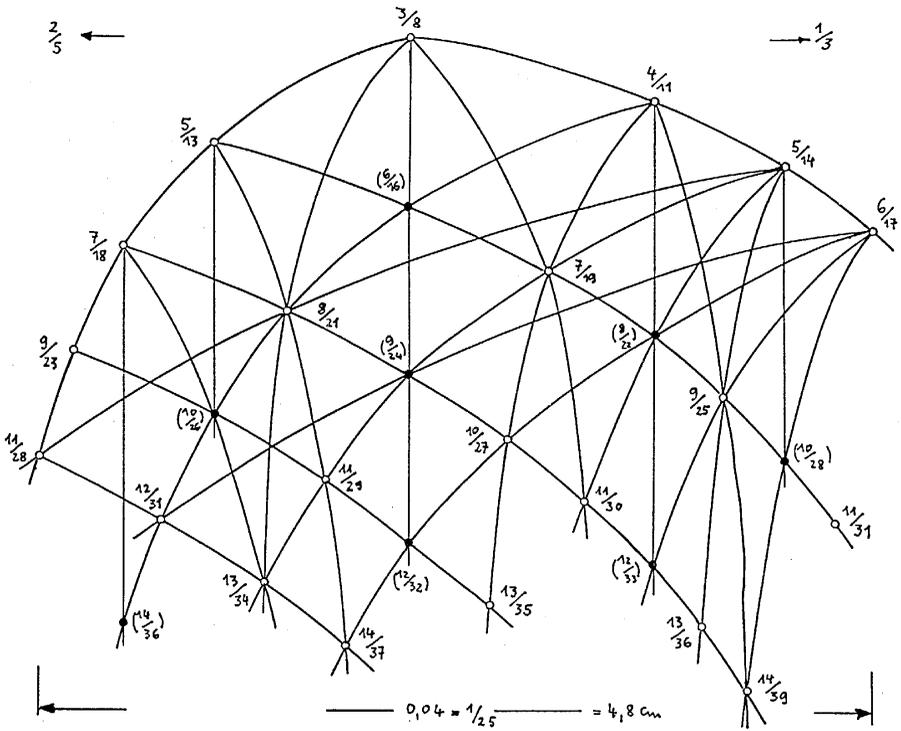


Fig. 5

### Kristalle, Additionsregel, Produktgesetz, Harmonikale Ordnung

Die Rangordnung der konsonanten Intervalle, die wir durch ihre verschiedenen großen Isolationen gewonnen haben, erinnert mich an die Rangordnung der Kristallflächen einer Zone, die Victor Goldschmidt, der Mineralogie-Professor in Heidelberg, um 1900 eingeführt hat. Er hat auch als erster die Verwandtschaft der Kristallstrukturen mit den Tönen angesprochen und auf Grund seiner Kristallgesetze eine musikalische Harmonielehre aufgestellt. Kayser berichtet darüber. Eine Zone besteht aus Kristallflächen, die sich alle in parallelen Kanten schneiden. Das ist z.B. bei den Seitenflächen eines Prismas der Fall; denken wir etwa an einen Bergkristall.

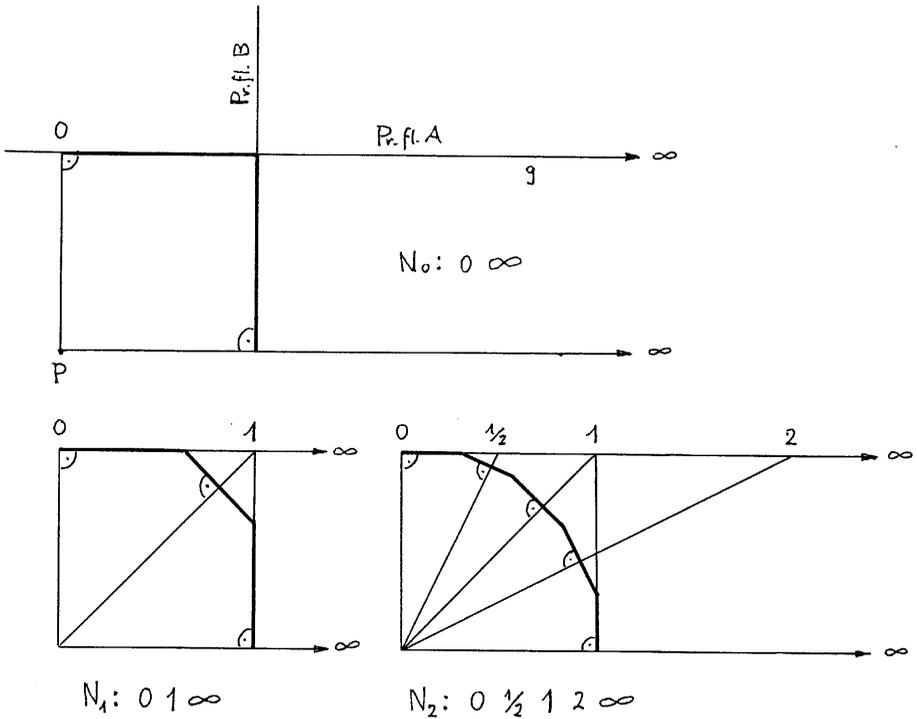


Fig. 6

Nach Goldschmidt wird jede Zone von zwei Ausgangsflächen, den sogenannten Primärflächen aus gebildet. Die Fig.6 zeigt Querschnitte durch eine Zone. Die Striche, die den Schnitt durch die Kristallflächen darstellen, sind dick ausgezogen. Ich wähle die beiden Primärflächen rechtwinklig zueinander und von beiden gleich weit entfernt im Innern des Kristalls einen Punkt **P**. Von diesem aus sei der Kristall gewachsen. Goldschmidt fällt von **P** aus die Lote auf die Primärflächen. Dies sind die Wachstumsrichtungen des Kristalls. Sie treffen die Gerade **g** in den Punkten **0** und  $\infty$  (1. Teilbild von Fig. 6). Er bezeichnet  $0 - \infty$  als nullte Normalreihe,  $N_0$ . Die Zone besteht einstweilen nur aus diesen beiden Primärflächen **A** und **B**. Ihr entsprechen die Symbole

$$N_0: \quad 0 \quad \infty \quad \text{oder} \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{0}$$

denn mathematisch ist  $\infty = 1/0$ .

Die erste Komplikation  $C_1$  geschieht durch die  $45^\circ$ - Ebene, welche eine Kante des Kristalls, die Schnittlinie von **A** und **B**, parallel abschneidet. Sie erhält das Symbol  $1 = \frac{1}{1}$ . Demnach ergibt sich die erste Normalreihe  $N_1$  durch Hinzufügen von  $C_1$  zu  $N_1$ :

$$N_1: \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{0} \quad (2. \text{ Teilbild})$$

Die nächste Komplikation schneidet die zwei neuen parallelen Kanten ab durch die Flächen, deren Lote von **P** aus die Gerade **g** in den Punkten  $\frac{1}{2}$  und  $2$  treffen. Das führt zur Normalreihe  $N_2$ :

$$N_2: \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1}{0} \quad (3. \text{ Teilbild})$$

So geht es weiter.

Rechnerisch gewinnt Goldschmidt stets die folgenden Normalreihen durch eine eigenartige Operation. Er addiert von zwei benachbarten Brüchen der Normalreihe die Zähler und die Nenner und macht die Summe der Zähler zum Zähler und die Summe der Nenner zum Nenner eines Bruches der nächsten Normalreihe. Dieser neue Bruch ist ein Mittelwert der Ausgangsbrüche, der sich im allgemeinen vom arithmetischen und vom harmonischen Mittel unterscheidet. Die hier angewendete Methode nenne ich *Additionsregel*. Sie wird in den folgenden Ausführungen eine große Rolle spielen.

Goldschmidt schrieb, daß die Natur bei der Kristallbildung selten über  $N_3$  hinaus gehe. Es zeigt sich hier eine ähnliche Beschränkung wie in der Musik bei den Frequenzverhältnissen der Intervalle.

In der Tabelle 1 sind die Normalreihen  $N_0$  bis  $N_4$  dargestellt. (Bei  $N_4$  ist es die sogenannte p-Reihe; die z-Reihe wird später besprochen.) Der Leser mag die Additionsregel selber nachprüfen. Die Tonnamen über  $N_4$  entsprechen der Deutung der Zahlen als Saitenlängen, wie sie Hans Kayser vorgenommen hat. Wir finden in dieser Tonreihe in einem Bereich von vier Oktaven lauter konsonante Intervalle und - durch Klammern angedeutet - Dreiklang und Quart-Sext-Akkord in Dur und in Moll.

Diese Reihe von Brüchen, die durch sukzessive Anwendung der Additionsregel aus zwei Grenzbrüchen gebildet worden ist, nenne ich "*harmonikal geordnet*" oder für diese Schrift einfach "*geordnet*". Zum Beispiel sind alle Normalreihen "*geordnet*".



Etwa für ein Beispiel aus  $N_4$ :

$$\text{für } \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \text{ist } 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1 \quad \text{und} \quad 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

Statt 1 dürfte auch eine andere Zahl stehen, etwa 2 im Beispiel

$$\frac{2}{13} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{2}{11} \quad \text{oder 3 im Beispiel} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{5}{13} \quad \text{in Fig. 4.}$$

Erst nachdem ich den letzten Abschnitt geschrieben hatte, hat mich Peter Neubäcker darauf aufmerksam gemacht, daß meine "geordneten" Reihen mit den sog. *Farey'schen Folgen* n-ter Ordnung übereinstimmen (1816). Das sind Folgen aller echten Brüche, einschließlich des Scheinbruches  $1/1$ , deren Nenner nicht größer ist als n und die der Größe nach geordnet sind. Farey gibt auch schon die Produktregel an. Meine "Ordnung" gilt aber nicht nur für alle der Größe nach aufgereihten Brüche eines bestimmten Index n, sondern z.B. auch für die Konsonanzenreihe, die Goldschmidt'schen Normalreihen und die harmonische Reihe der Stammbrüche.

### "Ordnung" und Reproduktion der Konsonanzenreihe

Auch die Konsonanzenreihe ist "geordnet". Sie läßt sich durch sukzessive Anwendung der Additionsregel aufbauen, und zwar entweder von  $1/2$  bis  $1/1$  oder von  $1/1$  bis  $2/1$ . In Fig.7 ist das für beide Oktaven maßstäblich getan. Längs des unteren Randes werden von links nach rechts, vom tiefsten bis zum höchsten Ton beide Oktaven durchschritten. Man erkennt die beiden gegenläufigen Kurven mit den überteiligen Brüchen  $2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5$  und den unterteiligen Brüchen  $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6$ . Man sieht auch deutlich die Tendenzen nach G und m des Goldenen Schnittes (siehe später).

An der Konsonanzenreihe habe ich noch eine andere merkwürdige Eigenschaft kennengelernt. Sie ist nicht nur "geordnet" wie die Normalreihen der Kristalle und das Produktgesetz gilt für alle ihre Glieder, sondern sie läßt sich auch reproduzieren. Auch das gilt für alle "geordneten" Bruchreihen.

In der Tabelle 2 habe ich die Konsonanzenreihe ohne  $4/7$  (es gelingt aber ebenso gut mit  $4/7$ ) links mit  $1/0$  und rechts mit  $0/1$  ergänzt, um sie den Goldschmidt'schen Normalreihen anzugleichen (erste Zeile).

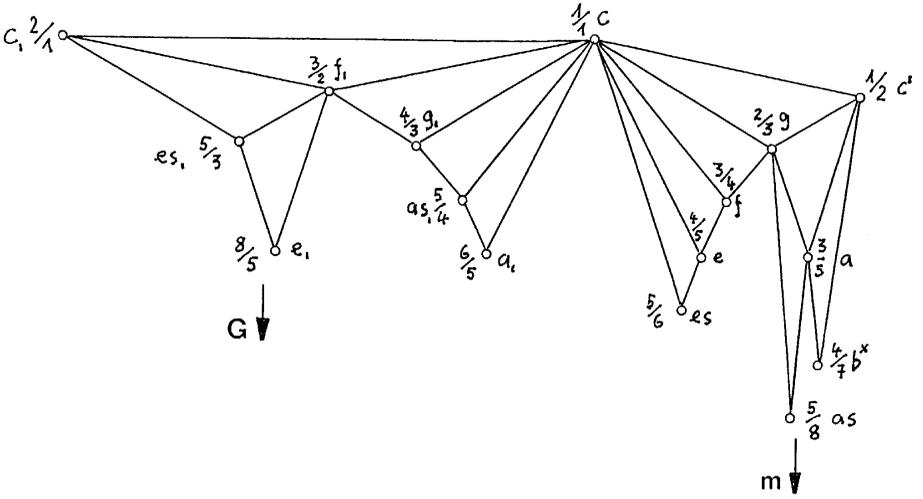


Fig. 7

$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{1}$
	$\frac{2}{1}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{8}{8}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{12}{18}$	$\frac{15}{24}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{5}{10}$	
	$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	
	c	es	e	f	g	as	a	c'	

Tabelle 2

Durch Anwendung der Additionsregel wurde aus ihr die zweite Zeile gebildet. Ich nenne sie "Zwischenreihe". Sie besteht mit Ausnahme der äußersten beiden Zahlen aus lauter ekmelischen Brüchen. Das heißt, in jedem Bruch kommt eine der drei Primzahlen 7, 11, 13 vor. Alle diese Brüche entsprechen dissonanten Intervallen. Auf dem Monochord klingt diese Reihe sehr fremd. Wenden wir aber auf die Zwischenreihe nochmals die Additionsregel an, so ergeben sich lauter kürzbare Brüche (dritte Zeile) und die gekürzten Brüche (vierte Zeile) decken sich alle mit der Ausgangsreihe.

Die Zwischenreihe sehe ich als Analogie zur Puppe eines Schmetterlings. Bei der Raupe sehen wir das Leben. Sie bewegt sich und ernährt sich und ist bisweilen auch schön. Die Puppe erscheint uns fremd, tot. Wir spüren nicht, was in ihr geschieht. Aber aus ihr schlüpft der farbige, lebendige Sommervogel, der eigentlich dasselbe Individuum ist wie die damalige Raupe.

## Brüche

Zu meiner Überraschung habe ich festgestellt, daß nicht nur die Normalreihen aus der Kristallographie und die Konsonanzenreihe "geordnet" und damit reproduzierbar sind, sondern auch alle Reihen, die wir in den Kurven der Diagramme Index 100 und Index 20 gefunden haben, also auch die harmonische Reihe  $1, 1/2, 1/3, 1/4 \dots$ , die Reihe der Schrittintervalle der Ober- oder Untertöne  $1/2, 2/3, 3/4, 4/5 \dots$ , und die angetroffenen Bruchfolgen, deren Zähler und Nenner arithmetische Reihen bilden. Zur Illustration greife ich aus der Bruchreihe Index 100 fünf beliebige aufeinanderfolgende Brüche heraus und prüfe den mittleren mit dem Produktgesetz:

$$\dots \quad \frac{39}{82} \quad \frac{10}{21} \quad \frac{41}{86} \quad \frac{31}{65} \quad \frac{21}{44} \quad \dots \quad 41 \cdot (21+65) = 86 \cdot (10+31) = 3526$$

Zu Index 6 gibt es 12 echte, nicht kürzbare Brüche. Zu Index 10 gibt es deren 32 und zu Index 20 deren 128 (0 nicht gezählt, aber  $1/1$ ). Man kann zeigen, daß man alle Brüche zu einem bestimmten Index in "geordneter" Reihenfolge bekommt, wenn man sie mit der Additionsregel aus den Grenzen  $0/1$  und  $1/1$  herleitet. Ich zeige das für den Index 6 und nehme noch vom Index 13 die Brüche  $3/8, 5/8, 5/13, 8/13$  dazu (maßstäblich gezeichnet, aber für die genannten vier Brüche in der

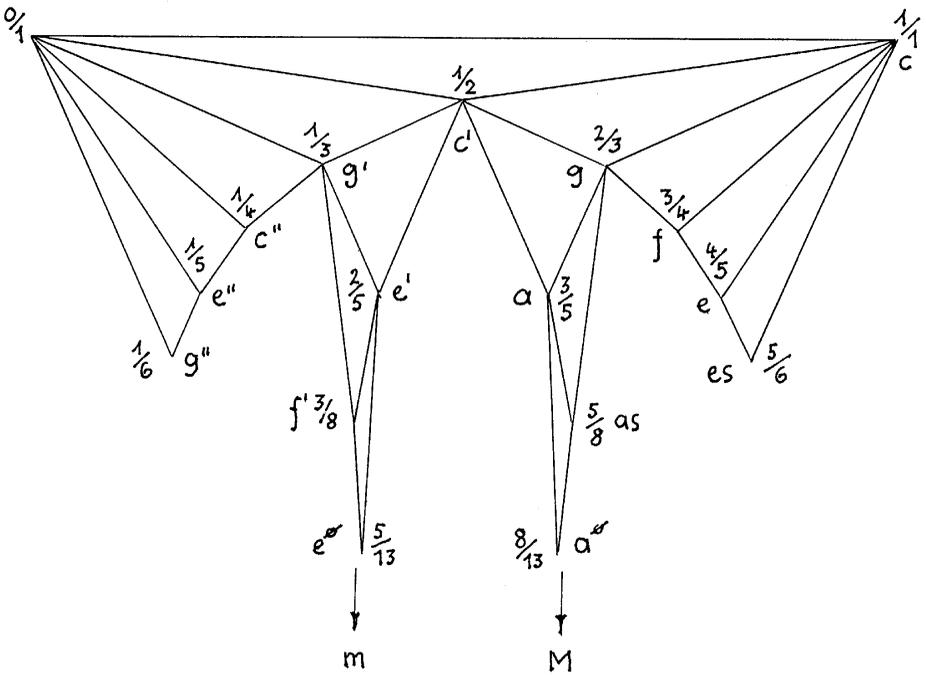


Fig. 8

Höhe verkürzt: Fig.8). Obschon diese Figur nur zur Herleitung der Brü- che gezeichnet worden ist, zeigt sie uns, wenn man im Index 6 verbleibt und sie von  $1/1$  bis  $1/2$  dem unteren Rand nach liest, genau die Konso- nanzenreihe und von  $1/2$  bis  $0/1$  zweimal den Durdreiklang. Der Leser möge die 12 Brü- che vom Index 6 selber nachzählen. Die ganze Figur zeigt uns aber auch, wie einfach und symmetrisch diese Konstruktion die beiden Zickzacklinien der Fibonaccizahlen über die konsonanten Inter- valle zu **m** und **M**, zu Minor und Major des Goldenen Schnittes (GS) führen. Davon später.

Um rückblickend noch einmal anschaulich zu machen, daß die hier beschriebene "Ordnung" auch im kleinen Detail zu finden ist, zeige ich das enge Intervall (nur 1.6 cm) von  $1/9$  bis  $1/8$  oder  $8/9$  bis  $7/8$  (siehe Fig. 1 und Fig. 2; in der letzteren sind die Punkte  $1/8$  und  $7/8$  schwarz gezeichnet). In diesem Bereich, der 7 mal verbreitert in Fig. 9 maßstäblich dargestellt ist, liegen 42 Brü- che zwischen den Ausgangsbrüchen.

Zunächst fällt dem Betrachter die Symmetrie des Bildes auf, und er fragt sich, ob das richtig sei; denn es ist  $1/8 - 2/17 = 1/136$ , also größer als  $2/17 - 1/9 = 1/153$ . Und tatsächlich, das Bild ist nur quasisymmetrisch. Die rechte Seite ist enger als die linke, die unterste Zahlenreihe  $11/89, 11/90, 11/91, \dots, 11/98$  ist etwas nach rechts unten geneigt und die äußerste Zahl links unten,  $12/97$ , steht allein, ohne einen Partner auf der rechten Seite. Die Symmetrie, die in die Augen springt, besteht zwar, aber sie erstreckt sich nur auf die Struktur, auf Anzahl und Anordnung der Dreiecke, auf die Verzweigung der Strahlen, und nicht auf die Werte der Zahlen. Immerhin läßt sich, mit Ausnahme des erwähnten Einzelgängers, jedem Bruch links ein bestimmter Bruch rechts zuordnen.

Der Betrachter, der sich eingehender mit Fig. 9 befaßt, wird bald sehen, daß in ihr, wie im großen Diagramm, eine Fülle von gesetzmäßigen Kurven zu finden ist. Um diese Figur nicht zu überlasten, habe ich genau dieselben 44 Punkte ( $1/8$  und  $1/9$  eingeschlossen) in Fig. 10 noch einmal gezeichnet, in ihr aber aus Rücksicht auf die Anschaulichkeit die Zahlen nicht eingesetzt. Diese können aus Fig. 9 entnommen werden. Man erkennt auch in ihr wieder die Quasisymmetrie.

Von den erwähnten Kurven habe ich 12 dick ausgezogen, 4 etwas dünner, 8 noch dünner und 4 gestrichelt. Die letzten sind nahezu gerade. Und jetzt stellen wir wieder das Verblüffende fest, an das wir uns schon etwas gewöhnt haben, daß alle 28 Kurven "harmonikal geordnet" sind. Manchmal fehlen zwar in diesen Reihen einzelne Brüche, weil sie in der Herleitung gekürzt schon vorher aufgetreten sind. Diese müssen aber, wenn man die "Ordnung" betrachten will, dazu gedacht werden.

Am Ende dieses Abschnittes möchte ich noch ausdrücklich darauf hinweisen, daß die in den ersten Seiten beschriebene Symmetrie eine echte, vollgültige ist.

## Transformation, Projektion

In Tabelle 1 haben wir über der Normalreihe  $N_4$  (p-Reihe) die Töne angeschrieben, die man erhält, wenn man die Glieder von  $N_4$  als Saitenlängen deutet. Goldschmidt hat aber seine Normalreihen in anderer Weise den Tönen zugeordnet. Alle Normalreihen beginnen und enden mit den Primärflächen 0 und  $\infty$ . Gerade zu diesen ließen sich demnach, wenn man sie als Saitenlängen oder Frequenzen deuten wollte, keine

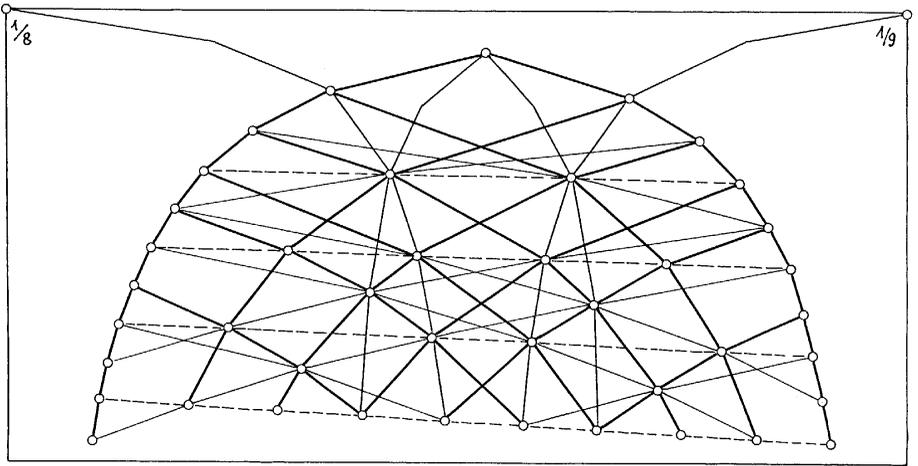
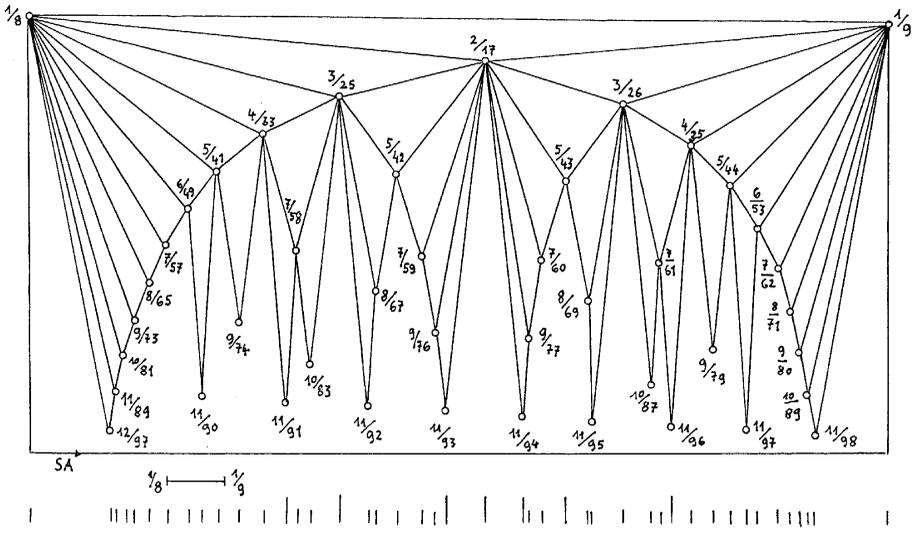


Fig. 9 & 10

Töne finden. Deshalb hat er in genialer Weise die Normalreihen oder p-Reihen in Oktavreihen oder sogenannte z-Reihen überführt.

Die Gleichung der Transformation, die das leistet, lautet

$$z = \frac{2p + 1}{p + 1}$$

Sie bildet tatsächlich die unendliche Strecke von 0 bis  $\infty$  auf die Strecke von 1 bis 2, also auf die Oktave ab. Ist zum Beispiel  $p = \frac{3}{2}$ , so ist

$$z = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} + 1}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{4}{\frac{5}{2}} = \frac{8}{5}$$

Ich zeige diese Transformation zuerst an  $N_3$ :<sup>3</sup>

p =	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{0}$
z =	$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{2}{1}$
	c	e	f	$g^{b \times}$	g	$a^b$	a	$b^{\times}$	$c'$

Dann verweise ich auf Tabelle 1. Dort ist unter  $N_4$  die z-Reihe geschrieben, und darunter stehen die Töne, die man erhält, wenn man die Glieder der z-Reihe als Frequenzen betrachtet. Sie liegen alle, wie erwartet, in einer Oktave und enthalten vollständig unsere Konsonanzreihe. Allerdings liegen dazwischen noch ekmelische Töne.

Mir war die genannte Transformationsregel von der projektiven Geometrie her vertraut. Dort regelt sie den Zusammenhang projektiver Punktreihen, das heißt zweier gerader Punktreihen, von denen die eine durch Projektion der anderen von einem Zentrum aus entstanden ist. Eine solche Projektion ist durch drei Punktepaare bestimmt. Goldschmidt wählte die Paare 0 - 1,  $\infty$  - 2,  $1 - \frac{3}{2}$ .

---

3. Wenn der Leser diese Transformation nachrechnen will, kommt er beim letzten Glied  $1/0$  zunächst in Verlegenheit, weil man durch 0 nicht dividieren darf. Er kann aber die Richtigkeit der Zuordnung von  $1/0$  zu  $2/1$  bestätigen. Wenn er in der genannten Formel für z die Größe p ausdrückt, kommt er zu  $p = (1-z)/(z-2)$  oder  $(z-1)/(2-z)$ , und wenn er dann  $z=2$  setzt, erhält er  $p = 1/0$ .

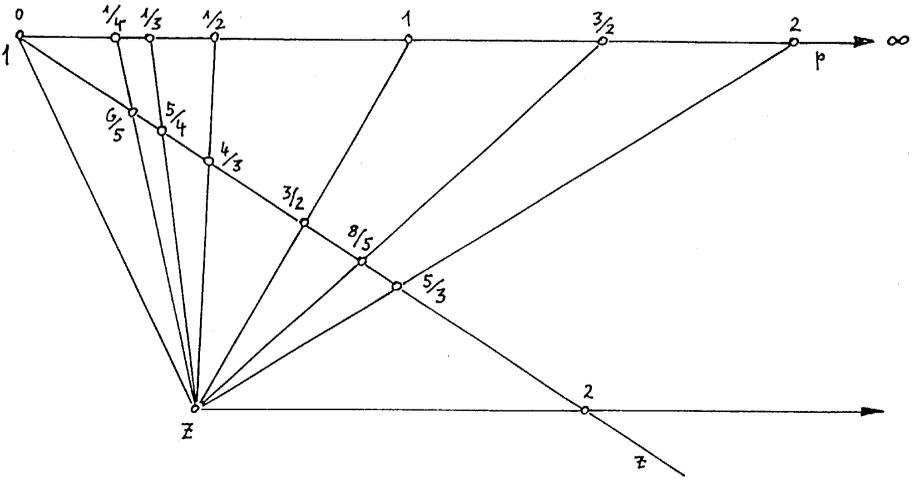
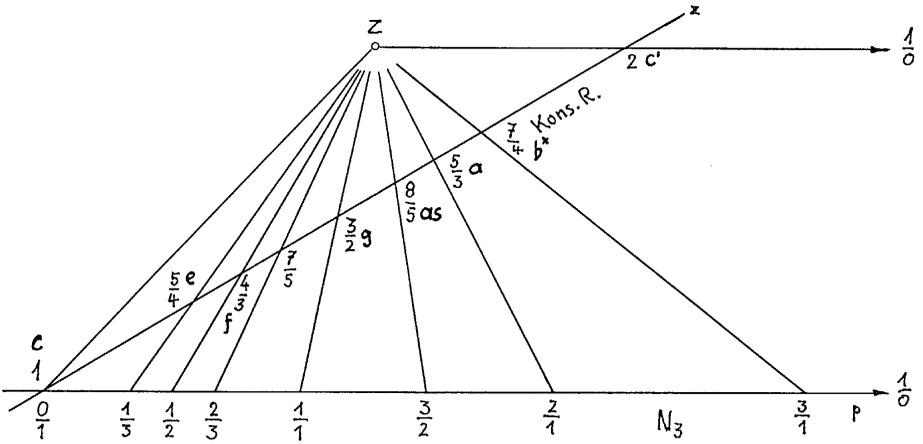


Fig. 11 & 12

Die oben beschriebene Transformation der  $N_3$  von der p-Reihe zur z-Reihe ist als Projektion in der Fig.11 gezeichnet. Als weitere Demonstration habe ich eine p-Reihe gebildet aus dem Anfang der harmonischen Reihe  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  und den ersten zwei Primzahlen 2 und 3, deren letztere halbiert zu  $\frac{3}{2}$ , und siehe da, die Projektion ergab als z-Reihe unsere Konsonanzenreihe (Fig.12).

### Tetraktys und Konsonanzenreihe

Die Vierheiten I bis VIII - man nennt sie bisweilen auch "archetypische Vierheiten" - sind in meinem Buch "Harmonikale Faszination"<sup>4</sup> ausführlich beschrieben. Ich wiederhole hier für die ersten vier davon eines der vielen Bildungsgesetze:

Man schreibt die Produkte  $1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot 2 = 2, 1 \cdot 3 = 3$ . Sobald der Unterschied der beiden Faktoren eines Produktes 2 ist, springt man zur nächsten Zahl:

$1 \cdot 1 = 1$			
$1 \cdot 2 = 2$			
$1 \cdot 3 = 3$		I	
$2 \cdot 2 = 4$			
$2 \cdot 3 = 6$			
$2 \cdot 4 = 8$		II	
$3 \cdot 3 = 9$			
$3 \cdot 4 = 12$			
$3 \cdot 5 = 15$		III	
$4 \cdot 4 = 16$			
$4 \cdot 5 = 20$			
$4 \cdot 6 = 24$			
$5 \cdot 5 = 25$			IV
$5 \cdot 6 = 30$			

Die Umfänge und die inneren Schritte der Vierungen sind  $\frac{3}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}$ , also Duodezime, Oktave, große Sext, Quinte und  $\frac{4}{3}, \frac{9}{8}, \frac{16}{5}, \frac{25}{24}$ , also Quarte, großer Ganzton, Halbton, Kepler'sche Diesis (Unterschied zwischen den beiden Terzen oder Sexten). Die inneren Schritte sind aber auch das harmonische Mittel H und das arithmetische

4. "Harmonikale Faszination" von R. Stoessel, Verlag Kreis der Freunde um Hans Kayser, Bern 1982.

Mittel A der beiden Grenzzahlen. Dabei ist das erstere immer ein Quadrat und das letztere immer um 1 kleiner als dieses.

Es besteht nun ein merkwürdiger Satz: *Das Produkt aller Brüche der inneren Glieder der Vierheiten, bis ins Unendliche, ist genau 2.* (Aus einer bekannten Produktformel, siehe "Faszination" S. 111.)

$$\text{Es ist also } \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{36}{35} \cdot \dots = 2$$

Aber auch die ersten Teilprodukte - und wieder einmal sind es die kleinen ganzen Zahlen - überraschen uns. Sie bilden nämlich, zusammen mit dem Bruch  $\frac{4}{3} f$ , dem Ziel  $\frac{2}{1} c'$  und der Ausgangszahl 1 c genau unsere Konsonanzenreihe  $e^b e f g a^b a c'$ .

$$\frac{1}{1} c; \quad \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} = \frac{6}{5} e^b; \quad \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} = \frac{5}{4} e; \quad \frac{4}{3} f; \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{2} g;$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8}{5} a^b; \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} = \frac{5}{3} a; \quad \frac{2}{1} c'$$

### Fibonacci-Reihe, Goldener Schnitt

Fibonacci, Leonardo von Pisa, 1180-1228. Von ihm stammt die Reihe 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ... , die in der Beschreibung der Pflanzengestalten eine Rolle spielt und schon oft beschrieben worden ist, z.B. in R. Stössel "Wege zur Harmonik"<sup>5</sup>. Sie beginnt mit den ersten drei Zahlen und jede weitere Zahl ist die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen. Ich bezeichne sie mit F oder I. Eine ähnliche Reihe, die in der Natur selten angetroffen wird, stammt von Lamé, 1793-1870. Sie lautet 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... und folgt für die weiteren Glieder demselben Bildungsgesetz. Ich nenne sie L oder II. Weitere ähnliche Reihen bezeichne ich mit III, IV, V..

III: 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37 ....

IV: 1, 5, 6, 11, 17, 28, 45 ...

V: 1, 6, 7, 13, 20, 33, 53 ...

---

5. "Wege zur Harmonik" von R. Stoessel, Verlag Kreis der Freunde um Hans Kayser, Bern 1987

Uns interessieren die Reihen der Brüche benachbarter Glieder der Fibonacci-Reihe:

für die echten Brüche  $\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{8}{13} \dots \Rightarrow M = 0.618\dots$

für die unechten Brüche  $\frac{2}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{13}{8} \dots \Rightarrow 1+M = 1.618\dots$

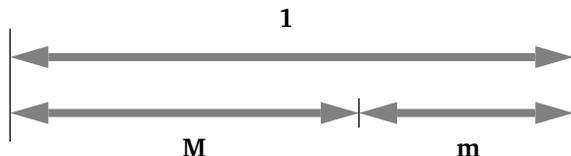
und für die Brüche aus übernächsten Gliedern:

für die echten Brüche  $\frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{5}{13} \quad \frac{8}{21} \dots \Rightarrow m = 0.382\dots$

für die unechten Brüche  $\frac{3}{1} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{13}{5} \quad \frac{21}{8} \dots \Rightarrow 2+M = 2.618\dots$

Alle vier Reihen, wenn man sie ins Unendliche fortgesetzt denkt, streben nach dem Goldenen Schnitt, den sie im Unendlichen erreichen würden, nach **M**, **1+M**, **m** oder **2+M**. Ihre einzelnen Glieder sind alle Näherungen des Goldenen Schnittes und kommen diesem beim Fortschreiten der Reihe immer näher, wobei sie seinen Wert bei jedem Schritt abwechselnd von oben und von unten überspringen.

Der Goldenene Schnitt teilt eine Strecke 1 in zwei ungleiche Teile so, daß sich die ganze Strecke 1 zum großen Teil (Major, **M**) verhält wie dieser zum kleinen Teil (Minor, **m**). Es ist also  $1 : M = M : m$  oder  $1 : M = M : (1-M)$ .



Ich verweile noch etwas bei diesem Thema, weil es sich immer mehr zeigt, wie eng die Bruchreihen von **F** und **L** als Näherungen des Goldenen Schnittes mit den Kristallen, den Pflanzen, der Verteilung der Brüche und der Konsonanzenreihe verflochten sind. Es gehören nämlich alle 9 Brüche der letzteren in die Fibonacci-Familie:

<b>F</b>	<b>IV</b>	<b>III</b>	<b>L</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>L</b>	<b>F</b>
$\frac{1}{1}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{2}{1}$
c	e <sup>b</sup>	e	f	g	a <sup>b</sup>	a	b <sup>x</sup>	c'

Wir fassen diese Konsonanzenreihe als p-Reihe auf und projizieren sie nach der uns bekannten Formel in die z-Reihe, und diese projizieren wir noch einmal in eine z'-Reihe, dann die letztere in eine z''-Reihe usw. Dabei erfahren wir, daß die Fibonacci-Verwandtschaft der Glieder unverändert bleibt.

Ich wähle als Beispiel die drei ersten und die zwei letzten F - Glieder der Konsonanzenreihe, c g a<sup>b</sup> (kleiner als G) und a c' (größer als G). Das Ergebnis ist erstaunlich. Wir finden in den beiden folgenden Matrizen auffallende "Gleichtonlinien".

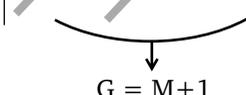
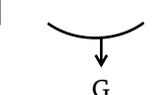
		c	g	a <sup>b</sup>		a	c'
p		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$		$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{1}$
z		$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{21}{13}$		$\frac{13}{8}$	$\frac{5}{3}$
z'		$\frac{8}{5}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{55}{34}$		$\frac{34}{21}$	$\frac{13}{8}$
z''		$\frac{21}{13}$	$\frac{55}{34}$	$\frac{144}{89}$		$\frac{89}{55}$	$\frac{34}{21}$
		 G = M + 1				 G	

Tabelle 3

Schreibt man die Kolonnen p z z' z'' nebeneinander und liest die Zähler und die Nenner in Richtung der Pfeile, so erhält man einen Ausschnitt der ganzzahligen F - Reihe 2 3 5 8 13 21 34 55. Z.B. für  $\frac{3}{2}$  g :



Das Entsprechende gilt für alle 9 genannten und in Fig. 13 gezeichneten Punkte der p-Geraden, die zu den konsonanten Intervallen gehören. An dieser Figur erkennen wir, daß die Oktave  $c - c' 2$  der p-Reihe auf den kleinen Ganzton  $10:9$ , von  $g^{3/2}$  bis  $a^{5/3}$  zusammengeschrumpft ist. Die weitere Projektion von  $z$  auf  $z'$  ist in Figur 13 unten links dargestellt. Durch sie reduziert sich der Bereich auf das kleine Intervall von  $8/5$  bis  $13/8$ , dessen Verhältnis  $(5 \cdot 13)/(8 \cdot 8) = 65/64$  nur wenig größer ist als ein syntonisches Komma.

Zwei weitere solche Projektionen reduzieren den Bereich zunächst auf  $21/13$  bis  $34/21$  (s. Tabelle 3) und dann auf  $55/34$  bis  $89/55$ . Diese beiden Brüche sind aber beim Index 100 benachbart. Ihre Striche liegen im Diagramm nur 0,64 mm auseinander. Dazwischen liegt kein weiterer Strich von diesem Index, aber bekanntlich der Wert  $1+M$  des Goldenen Schnittes. So könnte man schließlich sagen, die ganze konsonante Reihe sei auf einen Punkt, auf einen Ton, und zwar auf  $1+M$  des Goldenen Schnittes zusammengeschrumpft; der Goldene Schnitt sei quasi der

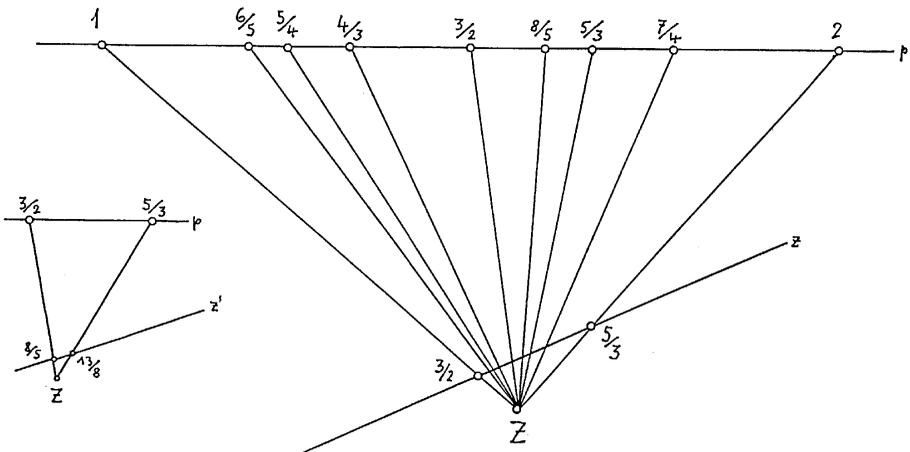


Fig. 13

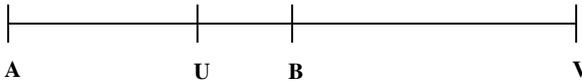
Keim der Konsonanzenreihe und damit auch der unendlichen Halbgeraden von 0 bis Unendlich.

Was das harmonikal oder musikalisch eigentlich bedeutet oder was dem Phänomen eigentlich zugrunde liegt, weiß ich nicht. Ich lasse die Frage offen, wie manche andere, als weiteres Geheimnis.

### Harmonischer Wurf, Perspektive

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die im großen Diagramm gezeigte Ordnung der echten Brüche auch als Ordnung der konsonanten Intervalle gedeutet werden kann. So ist es wohl gerechtfertigt, wenn ich auch von der Konsonanzreihe her dieser Ordnung noch etwas weiter nachspüre. Es handelt sich um den harmonischen Wurf, eine besondere Anordnung von vier Punkten einer Geraden, die in der projektiven Geometrie eine fundamentale Rolle spielt.

Vier Punkte **A B U V** einer geraden Linie bilden einen harmonischen Wurf, wenn **U** die Strecke **AB** innen im selben Verhältnis teilt, wie sie von **V** außen geteilt wird.



Das einfache Verhältnis  $AU/UB = TV$  nennen wir Teilverhältnis. Dann ist  $AV/VB = -TV$ . Das Verhältnis beider Teilverhältnisse – wir nennen es Doppelverhältnis,  $DV$  – ist dann  $TV/-TV = -1$  : es ist also  $DV = -1$ . So kann man einfach definieren: Vier Punkte einer Geraden bilden einen harmonischen Wurf, wenn ihr  $DV = -1$  ist.

Vertraut ist uns der Anblick der Telefonfernleitungen. Es seien in gerader Linie in stets gleichen Abständen Telefonstangen aufgestellt. Es ist uns bekannt, daß sie in perspektivischer Darstellung um so kleiner erscheinen, je weiter weg sie sind, und daß ihre Längen auf einen Fluchtpunkt **F** zu abnehmen. Die Geometrie lehrt nun, daß im perspektivischen Bild je drei aufeinander folgende Stangen auf Punkten stehen, die mit **F** einen harmonischen Wurf bilden (Fig. 14 und 15).

Ich habe in *“Harmonikale Faszination”* gezeigt, daß die pythagoräische Vierheit 6 8 9 12 , die sogenannte Harmonia perfecta maxima

(HPM), die den Tönen  $c$   $f$   $g$   $c'$  entspricht, als harmonischer Wurf betrachtet werden kann. Nun stelle ich fest, daß unsere Konsonanzenreihe neben 6 8 9 12 noch vier weitere harmonische Würfe aufweist, nämlich zwei mit dem Umfang einer Quinte:

$c$	$e$	$f$	$g$	und	$f$	$g$	$a^b$	$c'$
$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{2}{1}$

und zwei mit dem Umfang einer Quarte:

$c$	$e^b$	$e$	$f$	und	$g$	$a^b$	$a$	$c'$
$\frac{1}{1}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{1}$

Die beiden Paare sind symmetrisch aufgebaut. Man denke sich in der obigen Textdarstellung anstelle von "und" eine Symmetrieachse.

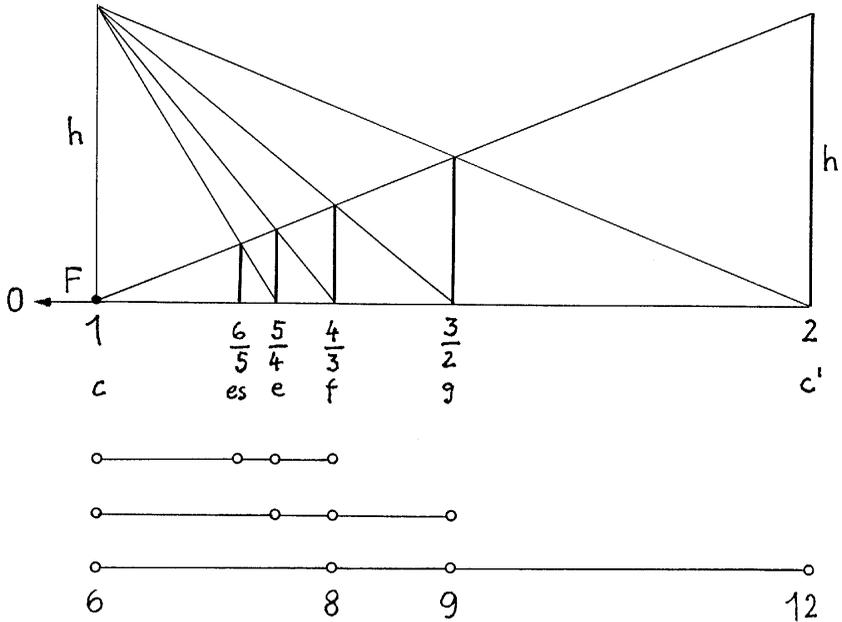


Fig. 14

Dann haben alle Produkte aus je zwei symmetrischen Zahlen oder Brüchen denselben Wert 2. Es sind Produkte aus Frequenzen komplementärer Intervalle.

Für den zuletzt genannten Wurf will ich die Rechnung durchführen:

Ich erweitere  $\frac{3}{2}$   $\frac{8}{5}$   $\frac{5}{3}$   $\frac{2}{1}$  mit 30 zu 45 48 50 60 und bilde

$$\frac{48 - 45}{50 - 48} = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \frac{60 - 45}{60 - 50} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

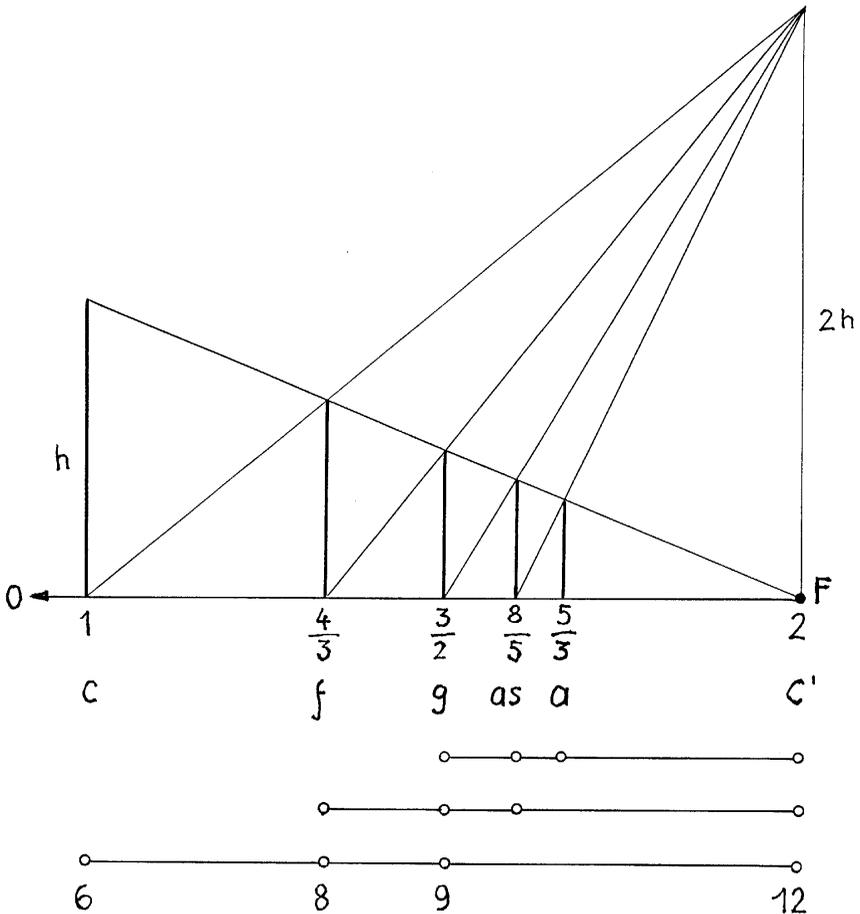


Fig. 15

Zwei der vier Würfe sind in Fig. 14 und die anderen beiden in Fig. 15 jeweils zusammen mit der HPM (6 8 9 12) dargestellt. Dabei liegen die harmonischen Punkte für jeweils drei Würfe in den Fußpunkten der fünf Telefonstangen und im Fluchtpunkt **F**. Unterhalb der Zeichnungen sind sie nochmals als Strecken veranschaulicht.

Drei dieser harmonischen Würfe gehen von *c* aus nach höheren Tönen und drei von *c'* aus nach tieferen Tönen. Die HPM gehört zu beiden Gruppen, weil sie sich über die ganze Oktave, von *c* bis *c'* erstreckt.

Oder, musikalisch ausgedrückt, streben Quinte, Quarte, beide Terzen gegen den Grundton *c* und Quarte, Quinte, beide Sexten gegen die Oktave *c'*. In dieser Analogie spielen also in Fig. 14 die Tonika *c* und in Fig. 15 die Oktave *c'* die Rolle des Fluchtpunktes, nach dem die übrigen Intervalle gerichtet sind. Geometrisch lassen sich in beiden Figuren die Reihen der Telefonstangen gegen 0 und gegen Unendlich hin beliebig fortsetzen.

Harmonikal auffallend, aber unbedeutend, ist die Tatsache, daß die einfachen Teilverhältnisse der fünf Würfe

$$TV = \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \text{sind, also } g \ a \ c' \ g' \ c'' \text{ entsprechen.}$$

Mit dieser unscheinbaren, verborgenen Reihe will ich schließen und mit der Ahnung weiterer, noch nicht gefundener Verborgenheiten.

## Rückblick

Die Konsonanzenreihe ist eingebettet in eine Fülle von Phänomenen verschiedenster Art. Sie könnte entwickelt werden aus unserer Seele durch deren Schönheitsempfinden, aber auch aus der Ordnung der Brüche mit bestimmtem Index, aus einer gewissen Isolation ihrer Glieder, aus der Ordnung der Kristallzonen, aus derjenigen der Perspektive, vermittelt durch die fünf harmonischen Würfe, die man in ihr findet. Man könnte sie auch aufbauen mit einer Additionsregel oder durch Projektion der auf einer Geraden aufgebauten einfachsten Brüche auf eine andere Gerade, und sie steht durch die Fibonacci-Reihe mit Pflanzengestalten und mit dem Goldenen Schnitt in enger Beziehung. Sie zeigt auch eine eigenartige Reproduzierbarkeit und in ihr gilt für jedes Glied ein Produktgesetz als Zeichen für eine natürliche Ordnung.

## Über diesen Beitrag

Alle Beiträge sind Überarbeitungen von Vorträgen, die im Rahmen der Veranstaltungen des "Arbeitskreis Harmonik" am Freien Musikzentrum München gehalten wurden.

### **Rudolf Stössel: Konsonante Intervalle**

Dieser Beitrag bildet in diesem Buch eine Ausnahme, da der zugrundeliegende Vortrag schon 1988 gehalten wurde. Es war ursprünglich geplant, den Beitrag separat als Buch zu veröffentlichen, wozu Peter Neubäcker noch einen zweiten Teil über die fraktalen Aspekte der Ordnung der rationalen Zahlen schreiben wollte. Da es dazu bisher nicht gekommen ist, ist der Beitrag mit in dieses Buch aufgenommen worden.

### **Rudolf Stössel**

Geboren am 30. November 1903 in Frauenfeld. Primarschule und Kantonsschule mit Matura (1922) in Frauenfeld. Ein Jahr Praktikum in einer Werkzeugfabrik und in einer Liftfabrik in Stuttgart und in der Lokomotivfabrik in Winterthur. Studium von Mathematik und Physik an der ETH, Diplom 1927. Drei Jahre Assistent für Physik an der ETH bei Prof. Paul Scherrer. Doktor der mathematischen Naturwissenschaften ETH 1931. Seit 1932 vierzig Jahre Fachlehrer für Mathematik und Physik am kantonalen St. Gallischen Lehrerseminar in Rorschach, wo er die Harmonik auch oft in den Unterricht einfließen ließ und viele Schüler für die Harmonik interessierte. Seit 1977 wohnhaft in St. Gallen. Neben der beruflichen Tätigkeit Puppenspieler und Harmonik-Forscher, Verfasser einiger Schriften über Harmonik.

Ursprünglich erschienen in:

Harmonik & Glasperlenspiel. Beiträge `93.

Verlag Peter Neubäcker & freies musikzentrum, München 1994